guessmaths

Exercices sur la dérivabilité

Exercice 1 :(avec solution)

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x-2} & si \quad x \geq 2 \\ f(x) = \sqrt[3]{2-x} & si \quad x < 2 \end{cases}$

1- Montrer que f est dérivable au point $x_0 = 0 \quad et \quad x_1 = 2$.

2- Donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x}$.

1- Déterminer le domaine de définition de f .

2- Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3- Etudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 1$.

4- Interpréter géométriquement résultat obtenu .

5- Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$ et dresser Le tableau de variation de f .

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x\sqrt[3]{x-2}$.

1- Déterminer le domaine de définition de f.

2- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3- Etudier la dérivabilité de f à droite de 2 ,puis donner une Interprétation géométrique au résultat obtenu.

4- Montrer que : $f'(x) = \dfrac{4x-6}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \quad (\forall x \in]2; +\infty[)$

5- a) Montrer que f admet une fonction réciproque sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable au point 3 ; puis calculer $(f^{-1})'(3)$.

Exercice 4 :(avec solution)

Soit la fonction f définie sur IR^+ par : $f(x) = x\left(\sqrt{x} - 2\right)^2$.

1- Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 ,puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu .

2- Montrer que : $f'(x) = 2\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)$, puis dresser son tableau De variation .

3- Soit g la restriction de f sur $I = [4; +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque sur un intervalle

J à déterminer.

b) calculer $\left(g^{-1}\right)'(9)$.(on remarquera que $g(9)=9$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x-2\sqrt{x} & si \quad x\geq 0 \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} & si \quad x<0 \end{cases}$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- Montrer que f est continue en 0 .

3- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

4- Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$

Puis dresser le tableau de variation de f .

5- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;1]$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à déterminer.

b) montrer que g^{-1} est dérivable au point $\left(-\dfrac{3}{4}\right)$, puis calculer

$\left(g^{-1}\right)'\left(-\dfrac{3}{4}\right)$ sachant que : $\left(g\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{3}{4}\right)$.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}-1 & 0\leq x<1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{4} & x\geq 1 \end{cases}$$

1/ Etudier la continuité de f en $x_0=1$

2/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0=1$

3/ Donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus

Exercice 7 :

Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes

(il n'est pas demandé l'étude de la dérivabilité)

- $f(x)=x^5+\frac{1}{2}x^4-2x^3+5x-4$
- $f(x)=(2x+1)\sqrt{x}$
- $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+3}$
- $f(x)=(4-3x)^3$
- $f(x)=\frac{4}{(x^2-1)^3}$
- $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$
- $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
- $f(x)=\sin^4 x-\cos^2 x$
- $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$
- $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$
- $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

Exercice 8 :

Etudier la dérivabilité de f au point $x_0=a$ et donner une interprétation géométrique au résultat :

- $f(x)=x^3+1 \quad a=2$
- $f(x)=\sqrt{x-1}\ a=1^+$ (au point $x_0=a$ à droite)