guessmaths

Devoir surveillé n° 4 2éme semestre

Durée :3 heures **2éme Bac SM**

Exercice 1: (4 pts)

I) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $29x-13y=6$.

0,25 pts a) Vérifier que $(2;4)$ est solution de (E).

0,5 pts b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

II) Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E'): $x^{19}\equiv -2\ [29]$.

0,5 pts 1) a) Citer le petit théorème de Fermat.

0,25 pts b) Justifier que : $2^{28}\equiv 1\ [29]$ et en déduire que -8 est solution de (E').

2) Soit x_0 une solution de (E')

0,5 pts a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire que $x_0{}^{28}\equiv 1\ [29]$

0,5 pts b) Montrer que : $x_0{}^{57}\equiv -8\ [29]$ puis que : $x_0\equiv -8\ [29]$.

0,5 pts c) En déduire l'ensemble de solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E')

0,5 pts d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(x-3)^{19}\equiv -2\ [29]$

0,5 pts 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases}(x-3)^{19}\equiv -2\ [29]\\(x-3)^{13}\equiv -2\ [13]\end{cases}$

EXERCICE 2 (04 points)

Une urne U_1 contient 4 boules noires et 3 boules blanches.

Une urne U_2 contient 3 boules noires et 2 boules blanches.

Expérience : on jette un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, chaque face ayant la même probabilité d'apparaitre. Si la face numérotée 6 apparait, on tire une boule dans U_1, sinon on tire une boule dans U_2.

On considère les événements suivants : A «obtenir la face numérotée 6 », B «tirer une boule blanche».

(0,5 pt) 1. Schématiser la situation de l'expérience sous forme d'un arbre pondéré.

(0,75 pt) 2. Donner les probabilités de A et $\overline{\text{A}}$, où $\overline{\text{A}}$ est l'événement contraire de A.

(0. 5 pt) 3. Déterminer la probabilité de l'événement B .

(0,5 pt) 4. Calculer $p_{\text{B}}(\text{A})$, probabilité de A sachant B.

5. L'expérience précédente se répète 5 fois de suite de façons indépendantes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(0,5 pt) a) Donner la loi de probabilité de X,

(0,5 pt) b) Trouver l'espérance mathématique de X, $E(\text{X})$ et la variance de X. $V(\text{X})$

(0,75 pt) 6. L'expérience se répète n fois de suite de façons indépendantes, Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche dépasse $0,99$

WWW.GUESSMATHS.CO

EXERCICE 3(04 points)

(0,75 pts) 1. a) Déterminer le nombre complexe a tel que $a(1+i)=1+3i$, puis calculer ia^2.

(0,5 pts) b) Montrer que l'équation $z^2-(1+3i)z-4+3i=0$ a pour solutions a et ia dans $\mathbb{C}$.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $a=2+i$ et $b=-1+2i$.

(0,5 pt) a) Placer A et B dans le repère,

(0,75 pt) b) Vérifier que $b=ia$ et en déduire la nature exacte du triangle OAB.

3. Soit C le point d'affixe $c=1+\frac{1}{2}i$

(0,5 pt) a) Déterminer l'affixe d du point D tel que le triangle OCD soit rectangle-isocèle en O.

(1 pt) b) On note J ; K ; L et M les milieux respectifs de $[AB]$; $[DA]$; $[CD]$ et $[BC]$.

Déterminer la nature exacte du quadrilatère $JKLM$ et justifier votre réponse.

PROBLEME (8 points)

PARTIE A

1) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{1+x}-1-\ln(1+x)$,

(0,5 pt) a. Dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

(0,25 pt) b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère la fonction f de représentation graphique C_f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}\left[1+\ln(1+x)\right] & si \quad x\geq 0 \\ x+\frac{2e^x}{e^x+1} & si \quad x<0 \end{cases}$$

(0,5 pt) a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(0,5 pt) b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(0,5 pt) c. Montrer que f est continue en 0.

(0,5 pt) d. Démontrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$ on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{e^x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{e^x-1}{x}\right].$$

(1,25 pt) e. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

(0,75 pt) 3) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles où f est dérivable.

(0,75 pt) 4) Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations

(0,5 pt) 5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty;0[$

WWW.GUESSMATHS.CO

et vérifier que : $-0,7 < \alpha < -0,6$

(0,25 pt) *6) Montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$ *est asymptote oblique à* C_f *en* $-\infty$ *et donner l'autre asymptote à* C_f.

(0,25 pt) *7) Préciser la position relative de* (Δ) *et de* C_f *sur* $]-\infty;0[$.

(0,75 pt) *8) Tracer* $]-\infty;0[$ *et ses asymptotes dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

PARTIE B

Soit $\lambda \in]-\infty;0[$ *tel que* $\lambda < \alpha$, α *étant le réel défini dans la* ***partie A***.

Soit la partie du plan comprise entre C_f ; (Δ) *les droites d'équations* $x = \lambda$ *et* $x = \alpha$ *et* $A(\lambda)$ *son aire exprimée en unité d'aire.*

(0, 5 pt) *1. Calculer* $A(\lambda)$ *en fonction de* λ *et* α.

(0,25 pt) *2. En déduire* $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

WWW.GUESSMATHS.CO