Exercices sur les complexes **2éme Bac SM**

EXERCICE 1

Soit le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ *par :* $P(z)=z^3-\left[1+m-(m-1)i\right]z^2+\left[2m+2+\left(1+2m-m^2\right)i\right]z-2m^2-2$ *où m et est un paramètre réel.*

1/ a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ *admet une solution imaginaire pure* αi *où* α *est un réel que l'on déterminera.*

b) Mettre $P(z)$ *sous la forme* $(z-\alpha i)\left(z^2+az+b\right)$ *où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera.*

2/ a)Vérifier que $(1+i)^2=2i$ *.*

b) - Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $P(z)=0$*. On notera* z_1 *et* z_2 *les deux autres solutions.*

3/ Déterminer m pour que : $z_1+z_2=4-4i$

on donnes les points A, B, C du plan complexe (P) *muni d'un repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$ *, d'affixes respectives ;* $2i$ *;* $1-3i$ *;* $3-i$ *.*

On note S *la transformation qui transforme B en C et A en* A' *d'affixe* -2*.*

a) – Calculer l'affixe de l'image M' *par* S *,du point M d' affixe*

b) – Déterminer la nature de S *et ses éléments caractéristiques .*

EXERCICE 2

Le plan complexe P *est rapporté à un repère orthonormé* $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

On désigna par A ; B ;M (M distinct de A et de B) et M' *les points d'affixes respectives* a *;* 1 *; z et* $z'=\dfrac{z-a}{z-1}$ *tel que* $z\neq 1$

1/ On pose $a=1+e^{i2\theta}$ *.*

a- Montrer que M et M' *sont confondus si et seulement si* $z^2-2z+1+e^{i2\theta}=0$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-2z+1+e^{i2\theta}=0$

2/ Dans la suite de l'exercice On pose $a=2$ *et Soit* $\alpha\neq 2k\pi$ *ou k est un entier relatif .*

a- Montrer que pour tout $\alpha\neq 2k\pi$ *ou k est un entier relatif* $\dfrac{1}{1-e^{i\alpha}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

b- Déduire que $z'=e^{i\alpha}$ *équivaut à* $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\dfrac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

3/ a- Déterminer et construire l'ensemble Δ *des points M d'affixe z du plan tels que :* $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right|=1$

b- Déterminer et construire l'ensemble Γ *des points M d'affixe z du plan tels que : arg* $\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

4/ Soit P le point d'intersection de Δ *et* Γ *.On note p l'affixe du point* P*.*

a- Construire le point P

b- Vérifier que : $\dfrac{p-2}{p-1}=e^{i\frac{\pi}{6}}$ *déduire l'affixe p du point* P*.*