EXERCICE 1

Parie A :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$

1) Calculer $f'(x)$*, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.*

2) Calculer $f(0)$ *. Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par* α *,appartient à* $[-0,72\ ;-0,71]$.

3) Donner le signe de $f(x)$*, pour* $x\in]-1;+\infty[$.

Parie B :

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D=]-1;0[\cup]0\ ;+\infty[$ *par :* $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

1) a) Calculer les limites de $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

2) a) Calculer $g'(x)$

b) Montrer que $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

.En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ *en prenant* $\alpha\simeq-0,715$.

3) a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b) Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

$\|\vec{i}\|=2cm$ *et* $\|\vec{j}\|=1cm$

4) Soit h la fonction définie sur D par : $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}$

a) Déterminer des fonctions u et v telles que : $h(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$ *et en déduire une primitive de h.*

b) Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x(x+1)}$

c) Déduire des questions précédentes, une primitive de g.

EXERCICE 2

Partie A

1/ Soit g la fonction définie sur IR_+ *Par :* $g(x)=(1-x)\ln x-x$.

Déterminer le signe de $g(x)$

2/ Soit h la fonction définie sur IR_+ *Par :* $h(x)=\ln x-x$

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) En déduire le signe de h.

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR_+^* *Par :* $f(x)=\ln x(\ln x-x)$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur IR_+^* et que $f'(x)=\dfrac{g(x)+h(x)}{x}$

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Etudier les branches infinies de (C_f).

4) a) Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

b) Déterminer une équation de tangente T à (C_f) au point d'abscisse 1

c) Vérifier que le point A(e,-e+1) est un point d'intersection de (C_f) avec T.

5) Construire (C_f) et T.

Soit $\alpha\in]0;1[$ et D la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$

Calculer à l'aide, d'une intégration par parties : $\int_\alpha^1 \ln^2 x\,dx$ et $\int_\alpha^1 x\ln x\,dx$.

En déduire, à l'aide de α , l'aire $A(\alpha)$ de D.

Déterminer : $\lim\limits_{\alpha\to0^+} A(\alpha)$

6) a) Monter que f réalise une bijection de IR_+^* sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer dans le même repère la courbe de $(C_{f^{-1}})$.

<u>EXERCICE 3</u>

<u>Partie A</u>

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln x}$

On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ Interpréter géométriquement les résultats.

2- a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[\setminus\{1\}$ par : $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3- Soit h la restriction de f sur $]0;1[$.

a- Montrer que h réalise une bijection de $]0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $]0;1[$ une unique solution α et que $0,5<\alpha<0,6$.

c- En déduire que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera.

4- Tracer (C_f).

5- Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h

6- a) Montrer que : $h'(\alpha)\ =-\dfrac{\alpha+1}{\alpha^3}$

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et exprimer $(h^{-1})'(0)$ en fonction de α.

<u>Partie B</u>

Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x)=2f(x^2)$.

On désigne par (C_g) la courbe de g repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- Vérifier que pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$

2- En déduire la position relative de (C_f) et (C_g) sur $]1;+\infty[$.

3- Soit $x \in [2;+\infty[$, on désigne par M et N les points respectifs de (C_f) et (C_g) d'abscisse x.
Pour quelle valeur de x , la distance NM est-elle maximale ?.

EXERCICE 4

Partie A

Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x+x-\frac{2}{x}$

1- calculer $\lim_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2- Montrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $g'(x)$

3- Dresser le tableau de variations de g .
Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

a- En déduire que $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.

b- Vérifier que : $\alpha \in]1;2[$.

c- En déduire un encadrement de α d'amplitude $0,1$.

4 - Déduire alors le signe de g.

Partie B

Soit f : la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x-x}{\sqrt{x+1}}$

1- Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2 - Etudier les variations de f.

3- a- Vérifier que : $f(\alpha)=\frac{2-2\alpha^2}{\alpha\sqrt{\alpha+1}}$

b- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4- Tracer C : la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct.

Partie C

Le but de cette partie est l'étude de la convergence de la suite réelle (S_n) définie par : $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$ pour tout $n>0$.

1- soit φ la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(x)=\sin x$.

Montrer que φ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2- soit φ^{-1} la réciproque de φ. Démontrer que φ^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ Et que : $\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- On pose $h(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour x appartenant à $[0,1[$

Montrer que : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}h\left(\frac{k}{n}\right) \quad \forall n>0$

4- En utilisant la croissance de h sur $[0,1[$ (et sachant qu'elle est intégrable au voisinage de 1)

Montrer que : $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x)dx \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x)dx$

5- En déduire alors que : $\int_{0}^{\frac{n-1}{n}} h(x)dx \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} h(x)dx$

6- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.