Problème 1

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x-2\sqrt{x+1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$.

4) Etudier la dérivabilité de f à droite de -1.

5) Montrer que : $\forall x>-1$; $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$

6) Dresser le tableau de variation de f

7) Résoudre l'équation $f(x)=0$ pour tout $x\geq -1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

8) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Problème 2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; puis interpréter géométriquement le résultat.

3) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4) a) Montrer que : $\forall x\in]1;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

5) a) Montrer que : $\forall x\in]1;+\infty[$; $f''(x)=\dfrac{-x+4}{4(x-1)^2\sqrt{x-1}}$

b) Etudier la concavité de (C_f).

c) Construire (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Problème 3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

WWW.GUESSMATHS.CO

1) déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

b) Etudier les branches infinies de (C_f).

3) Etudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ): $y = x - 1$.

4) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

c) Etudier les variations de f.

5) Montrer que $I\left(3; \frac{16}{9}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f).

6) Déterminer les points d'intersection de (C_f) et l'axe des abscisses.

7) Construire (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

8) Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

9) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe de la fonction g définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

$g(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right| \left|1 - \frac{1}{x}\right|$.

Problème 4

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) \times g(-x) = 1$.

2) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $g(x) > 0$.

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$; $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$; par : $f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

2) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction la droite (Δ) dont on déterminera une équation cartésienne.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

b) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer e équation de la tangente (T) à (C_f) au point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$

d) Construire (C_f); (Δ) et (T) dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

WWW.GUESSMATHS.CO