Série d'exercice Fonction logarithme **2éme Bac S**

Exercice I

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x\ln x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-2\ln x}{3+\ln x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{\ln\sqrt[5]{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x+1}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+2\tan x)}{x}$	$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x-3}{\ln x}$	$\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{x}{2}-\ln\sqrt{x}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{(\ln x)^2-\ln x+1}$	$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1+\ln x}{x\ln x+2}$	$\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)\ln(x^2+2x-3)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln x-x\ln(x+2)$

Exercice 2

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ *par:* $g(x)=x-2(x+1)\ln(x+1)$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) a) Calculer $g'(x)$ *et montrer que g est décroissante.*

b) En déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ g(x)<0$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ *par:* $f(x)=\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$

1) montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ *(poser* $t=\sqrt{x}$*)*

2) montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ *; puis interpréter géométriquement le résultat.*

3) a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(\sqrt{x})}{2x^2(1+\sqrt{x})}$

b) dresser le tableau de variations de f

4) tracer la courbe (C_f) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 3

Partie A

On pose : $g(x)=x-4+4\ln x$ *; pour tout* $x\in]0;+\infty[$.

1) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$

2) calculer $g'(x)$ *pour tout* $x\in]0;+\infty[$ *; puis dresser le tableau de variation de g.*

3) a) montrer que l'équation $g(x)=0$ *admet dans une seule solution* α *dans* $]1;2[$.

b) En déduire que : $g(x)\le0$ *sur* $]0;\alpha]$ *et* $g(x)\ge0$ *sur* $[\alpha;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ *par:* $f(x)=\left(1-\frac{4}{x}\right)\ln x$

1) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ *; puis interpréter géométriquement le résultat*

2) Montrer gue $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ *; donner une interprétation géométrique au résultat*

3) a) Montrer que $(\forall x>0)$ *;* $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) vérifier que $f(\alpha)=-\frac{4}{\alpha}(\ln\alpha)^2$ *puis dresser le tableau de variation de f.*

4) Tracer (C_f) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

on donne $\alpha\simeq 1,75$ $f(\alpha)\simeq -0,72$ *et* $f(1)=f(4)=0$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$ *par:* $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & si\quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Partie A

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

2) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *;* $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Calculer $f'(x)$ *et étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation*

4) Tracer la courbe (C_f)

Partie B

On considère la fonction g telle que: $g(x)=f(-1-x)$.

1) Déterminer le domaine de définition de g

2) montrer que les courbes de g et f sont symétrique par apport à (Δ).

3) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ *;* $f(n)<1<g(n)$.

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ *;* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice 5

On pose $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *pour tout n de* $\mathbb{N}^*$.

1) En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :

$(\forall k\in\mathbb{N}^*)$ *;* $\frac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$

2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ *;* $U_{n+1}-1\leq\ln(n+1)\leq U_n$

b) en déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$

3) On considère la suite (V_n) *définie par :* $V_n=U_{n-1}-\ln(n)$ *; pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$.

On pose : $f(x)=\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ *et* $g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

a) Dresser le tableau de variation de f et celui de g.

b) En déduire gue $\left(\forall n\in \mathbb{N}^{*} \right)$; $0< f\left(n \right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

c) Vérifier que $V_n=\sum_{k=1}^{n-1} f\left(k \right)$ en déduire que $\left(V_n \right)$ est décroissante

4) Montrer que $\left(\forall n>1 \right)$; $f\left(1 \right)<V_n<1-\frac{1}{n}$; déduire que $\left(V_n \right)$ est convergente puis encadrer sa limite a

Exercice 6

Soit $n\in \mathbb{N}^{*}$.

On considère la fonction f_n telle que : $f_n\left(x \right)=\left(x-n \right)\ln\left(x \right)-x\ln\left(x-n \right)$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left(x+1 \right)^2<2x^2$

b) Montrer que $\left(\forall p\in \mathbb{N} \right)$; $p\ge 5\Rightarrow p^2<2^p$.

c) Etudier le signe de $f_n\left(n+1 \right)$ et $f_n\left(n+2 \right)$.

2) Calculer $f_n'\left(x \right)$ et $f_n''\left(x \right)$ puis dresser le tableau de f_n.

3) a) Calculer $\lim_{x\to n} f_n\left(x \right)$

b) Montrer que : $\left(\forall x>n \right)$; $f_n\left(x \right)=-n\ln\left(x \right)-x\ln\left(1-\frac{n}{x} \right)$

c) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f_n\left(x \right)$

4) Tracer la courbe de la fonction f_1.

5) a) Montrer que l'équation $f_n\left(x \right)=0$ admet une seule solution α_n .

b) Montrer que $\lim_{n\to +\infty}\left(\alpha_n-n \right)=1$; puis calculer $\lim_{n\to +\infty}\left(\alpha_{n+1}-\alpha_n \right)$.

Exercice 7

Parie A

Soit la fonction g définie par: $g\left(x \right)=x+1+\ln x$

1) Calculer $g'\left(x \right)$ et montrer que g est croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

2) Montrer que l'équation $g\left(x \right)=0$ admet une solution α puis que $\alpha<\frac{1}{e}$

3) Déduire le signe de $g\left(x \right)$ sur $\left]0;+\infty\right[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f\left(x \right)=\frac{x\ln x}{x+1} & si \quad x\ne 0 \\ f\left(0 \right)=0 \end{cases}$

Et $\left(C_f \right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j} \right)$.

1- a) montrer que f est continue à droite en 0 .

b) étudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

2) a) calculer $\lim_{x\to +\infty} f\left(x \right)$.

b) étudier la branche infinie de $\left(C_f \right)$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) montrer que : $\left(\forall x>0 \right)$; $f'\left(x \right)=\frac{g\left(x \right)}{\left(x+1 \right)^2}$

b) vérifier que $f\left(\alpha \right)=-\alpha$ et dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) (on donne d= 0,28)

Partie C

Soit n un entier naturel

1) montrer que l'équation $f(x)=n$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution x_n .

2) montrer que $f(e^n)<n$; en déduire que $x_n>e^n$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

3) montrer que $\ln\left(\frac{x_n}{e^n}\right)=\frac{n}{x_n}$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{e^n}$.

Exercice 8

Partie I

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

1) Déterminer le domaine de f et calculer les limites de f.

2) calculer la dérivée $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

3) soit m un paramètre de $\mathbb{R}_+^*$.

a) montrer que $\frac{1}{m+1}\le\ln\left(\frac{m+1}{m}\right)\le\frac{1}{m}$

b) déduire que : $(\forall m\in\mathbb{R}_+^*)$; $0<f(m)<\frac{1}{m(m+1)}$

Partie II

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $U_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+n}$ et $T_n=f(n)+f(n+1)+...+f(n+n)$

a) montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $0<T_n<\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}$ calculer $\lim_{n\to+\infty} T_n$.

b) montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $T_n=U_n-\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

c) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $V_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{(-1)^{2n}}{2n}$

montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $U_n-\frac{1}{n}\le V_n\le U_n+\frac{1}{n}$.

Puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$