

Exercice 1

A l'aide des sommes de Riemann d'une fonction convenable, calculer la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

$$\blacksquare a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \quad \blacksquare b_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k\pi}{2n} \quad \blacksquare c_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{-\frac{k}{n}}$$

Correction Exercice 1

$\blacksquare a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$ Si l'on pose $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in [0;1]$, on a : encore

$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. Cette suite converge vers la valeur moyenne de f sur $[0;1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$

$\blacksquare b_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k\pi}{2n}$ Si l'on pose $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ pour $x \in [0;1]$, on a : $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

Cette suite converge vers la valeur moyenne de f sur $[0;1]$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

Pour calculer $\int_0^1 x \sin(x) dx$; on intègre par parties.

En posant $\begin{cases} u(x) = x & \text{et} & v'(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ u'(x) = 1 & \text{et} & v(x) = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{on obtient d'où : } \int_0^1 x \sin(x) dx &= \left[-\frac{2x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{4}{\pi^2}$.

$\blacksquare c_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{-\frac{k}{n}}$

Si l'on pose $f(x) = xe^{-x}$ pour $x \in [0;1]$, on a : $c_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n ke^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Cette suite converge vers la valeur moyenne de f sur $[0;1]$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ke^{-\frac{k}{n}} = \int_0^1 xe^{-x} dx$

Pour calculer $\int_0^1 xe^{-x} dx$; on intègre par parties.

En posant $\begin{cases} u(x) = x & \text{et} & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & \text{et} & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{on obtient d'où : } \int_0^1 xe^{-x} dx &= \left[-xe^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \\ &= -e^{-1} + \left[-e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Par suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1 - \frac{2}{e}$.

Exercice 2

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites suivantes:

$$\blacksquare a_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2n+3k}$$

$$\blacksquare b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\blacksquare c_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

$$\blacksquare d_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k}$$

$$\blacksquare e_n = \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$\blacksquare f_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$$

$$\blacksquare g_n = n^2 \prod_{k=1}^n k^{-\frac{4k}{n^2}}$$

Exercice 1

En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite (si elle existe) : $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)$

Exercice 2

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

1) Trouver une fonction $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue positive telle que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 3

Soit x un réel strictement positif.

1. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{e^x - 1}{x}$

2. En déduire, pour tout $x > 0$, la relation $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$

Exercice 4

Etablir les propriétés suivantes à l'aide de changements de variable simples.

a) Si f est une fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$.

b) Si f est une fonction continue de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

c) Si f est une fonction continue de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$, $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$.

Application. Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{-x}+1} dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x (1 + \tan^2 x)}{\sin x + \cos x} dx$ c) $\int_0^{\pi} \sin^5(x) \cos^2(x) dx$

d) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^{21}(x)}{1 + \sin^{13}(x)} dx$ e) $\int_0^1 \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx$

g) $\int_0^1 \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

- a) $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^{-x} + 1)^2} dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x (\sin x + \cos x)} dx$ c) $\int_0^{\pi} \sin^3(x) \cos^4(x) dx$
- d) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^{79}(x)}{1 + \sin^{15}(x)} dx$ e) $\int_0^1 \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^3 dx$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$
- g) $\int_0^1 x (\arctan x)^2 dx$

Exercice 7

On pose pour tout entier $n \geq 0$: $u_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^n} dx$.

- a) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- b) Etablir que, pour tout x de $[0;1]$, on a les inégalités $1-x^n \leq \sqrt{1-x^n} \leq 1 - \frac{x^n}{2}$.
- c) En intégrant les inégalités ci-dessus entre 0 et 1, déduire que la suite $(n(u_n - 1))$ est bornée.

Exercice 8

- a) Montrer que pour tout entier $k > 0$ on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- et que, pour tout entier $k > 1$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.
- b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$, est convergente, et que sa limite ℓ vérifie $-2 \leq \ell \leq -1$.

Exercice 9

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 4}} dt$.

- a) Montrer que F est une fonction impaire.
- b) Montrer que la fonction F est dérivable puis calculer $F'(x)$ pour x réel et déterminer le signe de $F'(x)$.
- c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités $0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 4}}$.
- d) Déduire de ce qui précède que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$ et donner un majorant irrationnel de $|F|$.
- Tracer approximativement le graphe de F

Exercice 10

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions F définies ci-dessous sont dérivables et calculer $F'(x)$.

- a) $F(x) = \int_a^b f(x+t) \cos t dt$ b) $F(x) = \int_a^b f(x-t) (1+t^2 + \sin t) dt$.

Exercice 11

Calculer la dérivée des fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$a) F(x) = \int_{3x-1}^{x^2+1} e^{(t-x)^2} dt$$

$$b) F(x) = \int_{2x+1}^{x^2+2} e^{(t+x)^2} dt$$

Exercice 12

Calculer la limite des suites définies ci-dessous.

$$a) u_n = \int_n^{4n} \frac{1+e^{-t}}{t} dt$$

$$b) v_n = \int_n^{n+1} \frac{1+e^{-t}}{t} dt .$$

Exercice 13

Calculer la limite des suites définies ci-dessous.

$$a) u_n = \int_{n^2}^{2n^2} \frac{\arctan \frac{x}{n}}{x} dx$$

$$b) v_n = \int_{n^2}^{n^4} \frac{\arctan \frac{x}{n}}{x \ln x} dx .$$