



Série n° 1 d'exercices corrigés « Arithmétique dans $\mathbb{N}$ »

Exercice 1

Soit deux nombre entiers naturels a et b ; on pose ; $a = 5^{n+2} - 5^n$ et $b = 7 \times 5^n + 5^{n+1}$

- 1) montre que a est un multiple de 3 .
- 2) montre que b peut être diviseur sur 12
- 3) donne la décomposition en nombre premiers de a et b
- 4) calcul le $\text{pgcd}(a; b)$

Solution de l'exercice 1

1) montrant que a est un multiple de 3 ; on a :

$$\begin{aligned} a &= 5^{n+2} - 5^n \\ &= 5^n (5^2 - 1) \\ &= 24 \times 5^n \\ &= 3 \times 8 \times 5^n \\ &= 3 \times k \end{aligned}$$

Où $k = 8 \times 5^n \in \mathbb{N}$

Donc a est un multiple de 3 .

2) $b = 7 \times 5^n + 5^{n+1}$

$$\begin{aligned} &= 5^n (7+5) \\ &= 12 \times 5^n \\ &= 12 \times k \end{aligned}$$

Où $k = 5^n \in \mathbb{N}$

Donc b est un multiple de 12 .

3) $a = 3 \times 8 \times 5^n = 3 \times 2^3 \times 5^n$.

$$b = 12 \times 5^n = 2^2 \times 3 \times 5^n .$$

4) $\text{pgcd}(a, b) = 2^2 \times 3 \times 5^n$

Exercice 2

- 1) déterminer les nombres premiers parmi les nombre suivants : 49 ; 239 ; 407 ; 387 ; 1559 ; 8367 .
- 2) décomposer les nombres suivants en élément premier : 675 ; 1650 ; 5292 ; 6250 .

Solution de l'exercice 2

1) 49 n'est pas un nombre premier par ce qu'il peut être divisé par 7 .

Les nombres suivants 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et 17 ne divisent pas 239 et on a : $17^2 > 239 > 23^2$ alors 239 est un nombre premier

2) la décomposition en nombres premiers

$$\neg 675 = 3^3 \times 5^2$$

$$\neg 1650 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 11$$

$$\neg 5292 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$$

$$\neg 6250 = 2 \times 5^5$$

Exercice 3

1) soit p un nombre premier plus grand que 3 ; on pose : $b = \frac{p-1}{2}$ et $a = \frac{p+1}{2}$

a) vérifier que a et b sont des nombre entiers naturels

b) calculer $a^2 - b^2$ en fonction de p .

2) montrer que chaque nombre premier p plus grand que 3 , s'écrit comme différence des carrés de deux nombre entiers naturels consécutifs

3) Donne cette soustraction pour $p = 41$.

Solution de l'exercice 3

1) a) On a p premier plus grand que 3 ; donc p est un nombre impair d'où $p+1$ et $p-1$ sont tous les deux

divisibles par 2 ; par suite a et b sont des entiers naturels.

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } a^2 - b^2 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{p^2 + 2p + 1}{4} - \frac{p^2 - 2p + 1}{4} \\ &= \frac{4p}{4} \\ &= p \end{aligned}$$

$$2) \text{ On a : } a = \frac{p+1}{2} - 1 + 1 = \frac{p+1-2}{2} + 1 = \frac{p-1}{2} + 1 = b + 1$$

Donc a et b sont deux entiers consécutifs ; de plus on a :

$$a + b = \frac{p+1}{2} + \frac{p-1}{2} = \frac{p+1+p-1}{2} = \frac{2p}{2} = p$$

D'où p s'écrit comme différence des carrés de deux nombre entiers naturels consécutifs.

$$3) \text{ pour } p = 41 ; b = \frac{41-1}{2} = 20 \text{ et } a = \frac{41+1}{2} = 21.$$

$$\text{On a : } 21^2 - 20^2 = (21+20)(21-20) = 41 \times 1 = 41 .$$

Exercice 4

1) factoriser ce qui suit :

$$\bullet a = x^2 - 5x + 4$$

- $b = 2x^2 + 3x - 2$

2) décomposer 3240 et 1440 en un produit des nombres premiers.

3) déduire une expression simple pour les deux nombres (la racine carrée de 3240 et de 1440)

4) soit k un nombre entier naturel, montrer que $k(k+1)$ est un nombre paire.

Solution de l'exercice 4

1) • $a = x^2 - 5x + 4$

$$= x^2 - 4x - x + 4$$

$$= x(x - 4) - (x - 4)$$

$$= (x - 4)(x - 1)$$

- $b = 2x^2 + 3x - 2$

$$= 2x^2 + 4x - x - 2$$

$$= 2x(x + 2) - (x + 2)$$

$$= (2x - 1)(x + 2)$$

2) • $1240 = 2^5 \times 3^2 \times 5$

- $3240 = 2^3 \times 3^4 \times 5$

3) • $\sqrt{1240} = \sqrt{2^5 \times 3^2 \times 5} = 4 \times 3 \times \sqrt{2 \times 5} = 12\sqrt{10}$

- $\sqrt{3240} = \sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5} = 2 \times 9 \times \sqrt{2 \times 5} = 18\sqrt{10}$