Exercice 1: (4 Pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$

1) a) Calculer u_1.

b) Montrer par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n > 2$.

2) a)- Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n-2)^2}{u_n+1}$.

b) En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; puis justifier qu'elle est convergente.

3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$; $a_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer a_n en fonction de n ; puis en déduire que :$(\forall n\in\mathbb{N}); u_n = \dfrac{4n+12}{2n+3}$.

c)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ en justifiant la réponse.

4) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$; $S_n = a_0u_0 + a_1u_1 + \ldots + a_nu_n$.

Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}); S_n = n^2 + 7n + 63$; puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(S_n)}{\ln(n)}$.

Exercice 2: (5 Pts)

I- On considère dans l'ensemble C l'équation:$(E): z^2 - 2\left(1-\sqrt{2}\right)z + 2\left(2-\sqrt{2}\right) = 0$

1) a)Montrer que le discriminant de (E) est : $\Delta = -4$.

b) En déduire les solutions z_1 et z_2 de(E) tels que : $Im(z_1) < 0$.

2) a) Calculer $|z_1|$; puis montrer que :$(1+i)\cdot z_1 = -\sqrt{2}\times\overline{z_1}$.

b) Déduire z_1 sous forme trigonométrique ; puis calculer $\cos\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)$.

II-On considère les points E, F et G d'affixes respectifs: $z_E = 1+i$; $z_F = 1-i$ et $z_G = -i\sqrt{3}$

1) Soit N l'image de F par l'homothétie h de centre G et de rapport 2 .

Montrer que l'affixe de N est: $z_N = 2 + i(\sqrt{3}-2)$.

2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On pose: $A = R(G)$ et $C = R(N)$.

Montrer que: $z_A = \sqrt{3}$ et $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{w}(2i)$.

On pose : $B = t(N)$ et $D = t(G)$.

Montrer que: $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_D = (2-\sqrt{3})i$.

4) a) Montrer que E est milieu de [AC] et de [BD].

Que peut-on déduire?

b) Vérifier que : $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = i$, puis en déduire la nature du triangle BCE.

c) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

Exercice 3: (11 Pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $(\forall x \in]0;+\infty[); g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$.

b) En déduire la monotonie de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) Calculer g(1), puis justifier que: $(\forall x \in]0;1]); g(x) \le 0$ et que: $(\forall x \in [1;+\infty[); g(x) \ge 0$

II-On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par: $(\forall x \in]0;+\infty[)$;

$f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln(x))^2 - 2$

1) a)Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$, puis en déduire que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$, puis en déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation: $y = x$.

2) a)Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f(x) = \frac{x^2 + 1 - 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2 - 2}{x}$.

b) En déduire que: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[); f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation complet de f en justifiant la réponse.

4) a)Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b) Montrer géométriquement que l'équation $(E): \frac{1}{x} - (\ln(x))^2 - 2 = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $[0;+\infty[$.

b) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) a) Montrer que la fonction $K: x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction

$k : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire que : $\int_1^e \ln(x)dx = 1$.

c)En utilisant une intégration par parties, calculer la surface délimitée par la courbe (C_f) la droite (Δ) et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = e$.

GUESSMATHS.CO