Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=(x+1)e^{-x}$

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- a. *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ *et interpréter géométriquement le résultat.*

b. *Montrer que* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ *puis déduire la nature de la branche infinie de la courbe* (C) *au voisinage de -∞.*

2) a. *Montrer que* $f'(x)=-xe^{-x}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$;

b. *Dresser le tableau de variations de f*

3) a. *Montrer que la courbe* (C) *admet un point d'inflexion d'abscisse* 1 .

b. *Déterminer une équation de la tangente* (T) *à la courbe* (C) *au point d'abscisse 1.*

c. *Tracer la courbe* (C)

Solution

$f(x)=(x+1)e^{-x}$

1) a. *Montrons que:* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Soit $x\in IR$, *on a :* $f(x)=(x+1)e^{-x}$

$$=\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=0$ *(car* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ *)*

Donc: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$

Interprétation géométrique:

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ *donc la droite d'équation* $y=0$ *est une asymptote horizontale à* (C) *au voisinage de +∞.*

b. *Montrons que :* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a :*

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$

  (car $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ *)*

  Donc: $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{x}=+\infty$

D'où: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

Interprétation géométrique:

La courbe (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $-\infty$.

1) a. Montrons que: $(\forall x \in \mathbb{R})\quad f'(x) = -xe^{-x}$

Les fonctions : $u : x \mapsto x+1$ et $v : x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \left(u(x) \times v(x)\right)'$

$$= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$= 1e^{-x} - (x+1)e^{-x}$$

$$= (1 - x - 1)e^{-x}$$

$$= -xe^{-x}$$

b. Tableau de variations de f:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -xe^{-x}$ et $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$, Donc:

le tableau de variations de f est le suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) a. Montrons que la courbe (C) admet un point d'inflexion

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $x \in IR$, on a : $f'(x) = -xe^{-x}$ donc: $f''(x) = -\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)$

$$= (x-1)e^{-x}$$

alors le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

Donc le tableau de signe de $f''(x)$ est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

On a $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en 1 et $f(1) = \dfrac{2}{e}$, donc le point $A\left(1; \dfrac{2}{e}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

b. Déterminons une équation de la tangente (T)

On a : $f(1) = \dfrac{2}{e}$ et $f'(1) = \dfrac{1}{e}$, Une équation de (T) est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$= -\frac{1}{e}(x-1) + \frac{2}{e}$$

$$= -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$$

D'où: $(T) : y = -\dfrac{1}{e}x + \dfrac{3}{e}$

c. Construction de (C):