

### **Partie I**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

On considère la fonction  $g_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g_n(x) = x + e^{-nx}$

et soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) a) Etudier les variations de  $g_n$ .

b) Montrer que  $g_n$  admet un minimum en un nombre réel  $u_n$ , qu'on déterminera en fonction de  $n$ .

2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$

b) Déterminer les branches infinies de la courbe  $(C_n)$ .

3) a) Etudier les positions relatives des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  représentatives des fonctions  $g_1$  et  $g_2$ .

b) Tracer dans le même repère les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$

4) On pose :  $u_n = g_n(u_n)$ , montrer que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et déterminer leurs limites.

### **Partie II**

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  par :  $f_n(x) = x + e^{nx}$ .

et soit  $(\Gamma_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) a) Etudier les variations de  $f_n$ .

b) Dédire que l'équation :  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_n$ .

2) a) Montrer que :  $\alpha_n \in \left]-\ln 2; -\frac{1}{2}\right]$ .

b) Montrer que :  $(x - \alpha_1)$  et  $(e^x + \alpha_1)$  ont le même signe.

3) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  par :  $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

a) Montrer que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ .

b) Dédire que :  $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|x - \alpha_1|$  pour tout  $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ .

4) On pose :  $\beta_0 = -\frac{1}{2}$  et  $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer qu'il existe un réel  $a$  tel que :  $|\beta_{n+1} - a| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|\beta_n - a|$

b) Montrer que la suite  $(\beta_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

## Correction

### Partie I

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

On considère la fonction  $g_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g_n(x) = x + e^{-nx}$

et soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) a) Etudier les variations de  $g_n$ .

La fonction  $g_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables et on a :

$$g'_n(x) = (x + e^{-nx})' = 1 - ne^{-nx} \text{ alors : } g'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - ne^{-nx} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ne^{-nx} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-nx} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow -nx \leq \ln \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln n}{n}$$

c'est-à-dire que : si  $x \in \left[ \frac{\ln n}{n}; +\infty \right[$  la fonction  $g_n$  est croissante ; si  $x \in \left] -\infty; \frac{\ln n}{n} \right]$  la fonction  $g_n$  est décroissante .

b) Montrer que  $g_n$  admet un minimum en un nombre réel  $u_n$  qu'on déterminera en fonction de  $n$ .

La fonction  $g_n$  est croissante sur  $\left[ \frac{\ln n}{n}; +\infty \right[$ .

Donc pour tout  $x \in \left[ \frac{\ln n}{n}; +\infty \right[$  on a :  $g_n(x) \geq g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ .

La fonction  $g_n$  est décroissante sur  $\left] -\infty; \frac{\ln n}{n} \right]$ .

Donc pour tout  $x \in \left] -\infty; \frac{\ln n}{n} \right]$  ; on a :  $g_n(x) \geq g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

On déduit que :  $g_n(x) \geq g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

C'est-à-dire que  $g_n$  admet un minimum en un nombre réel  $u_n = \frac{\ln n}{n}$  et  $g_n(u_n) = \frac{\ln(n)+1}{n}$ .

2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 - n \frac{e^{-nx}}{-nx} \right) = +\infty \text{ ( car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ )}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = +\infty$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-nx}) = +\infty \text{ ( car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-nx}}{-nx} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \text{ )}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$$

b) Déterminer les branches infinies de la courbe  $(C_n)$ .

$$\blacksquare \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{-nx}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{e^{-nx}}{x} \right) = 1 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0)$$

$$\text{De plus : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g_n(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-nx} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-nx}) = 0$$

Par suite la courbe  $(C_n)$  admet la droite d'équation  $y = x$  comme asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$ .

■ On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = +\infty$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^{-nx}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{e^{-nx}}{-nx} \right) = -\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-nx}}{-nx} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty)$$

On déduit que la courbe  $(C_n)$  admet au voisinage de  $-\infty$  une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3) a) Etudier les positions relatives des  $(C_1)$  et  $(C_2)$  courbes représentatives des fonctions  $g_1$  et  $g_2$

Pour étudier les positions relatives des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ , on va étudier le signe de la différence :

$$g_2(x) - g_1(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R} ; \text{ on a : } g_2(x) - g_1(x) &= x + e^{-2x} - x - e^{-x} \\ &= e^{-x}(e^{-x} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{■ On a : } e^{-x} - 1 &\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow -x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \end{aligned}$$

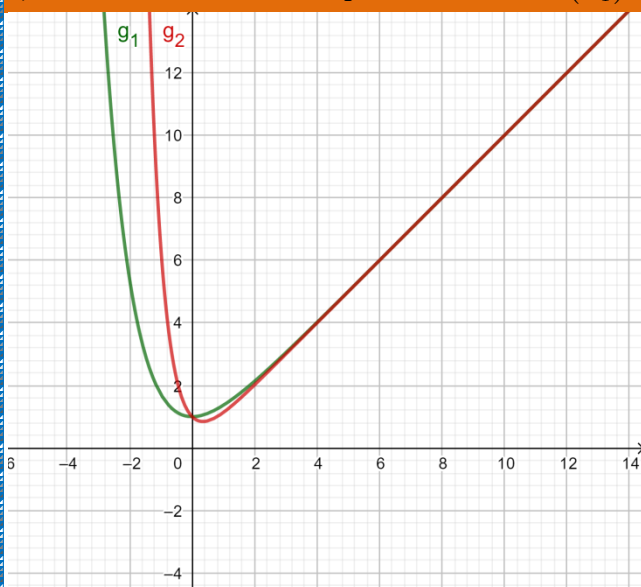
Si  $x \leq 0$  alors  $g_2(x) - g_1(x) \geq 0$  ; par suite  $(C_2)$  est au-dessus de  $(C_1)$ .

$$\begin{aligned} \text{■ On a : } e^{-x} - 1 &\leq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

Si  $x \geq 0$  alors  $g_2(x) - g_1(x) \leq 0$  ; par suite  $(C_2)$  est au-dessous de  $(C_1)$ .

■  $(C_1)$  et  $(C_2)$  se coupent au point  $(0;1)$

b) Tracer dans le même repère les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$



4) On pose:  $v_n = g_n(u_n)$  montrer que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et déterminer leurs limites.

On a :  $u_n = \frac{\ln n}{n}$  et  $v_n = g_n(u_n) = \frac{\ln(n)+1}{n}$  Puisque :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)+1}{n} = 0$  alors les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  Sont convergentes et on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

## Partie II

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]-\infty; -\frac{1}{2}[$  par :  $f_n(x) = x + e^{nx}$ .

et soit  $(\Gamma_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) a) Etudier les variations de  $f_n$ .

La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout sur

$$x \in \mathbb{R} : f'_n(x) = (x + e^{nx})' = 1 + ne^{nx}$$

On a :  $1 + ne^{nx} > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Donc :  $f'_n(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire que  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

|           |                        |
|-----------|------------------------|
| $x$       | $-\infty$<br>$+\infty$ |
| $f'_n(x)$ | +                      |
| $f_n$     | $+\infty$<br>$-\infty$ |

b) Dédire que l'équation :  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_n$  dans  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Puisque :  $0 \in f_n(\mathbb{R})$  alors l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_n$  dans  $\mathbb{R}$ .

2) a) Montrer que :  $\alpha_1 \in ]-\ln 2; -\frac{1}{2}[$

L'équation :  $f_1(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_1$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Puisque : } f_1(-\ln 2) = \frac{1}{2} - \ln 2 \text{ et } f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{e}}{2\sqrt{e}} \text{ alors } f_1(-\ln 2) \times f_1\left(-\frac{1}{2}\right) < 0.$$

$$\text{Donc : } \alpha_1 \in ]-\ln 2; -\frac{1}{2}[$$

b) Montrer que  $(x - \alpha_1)$  et  $(e^x + \alpha_1)$  ont le même signe.

$$\text{On a : } f_1(\alpha_1) = 0 \text{ donc : } \alpha_1 + e^{\alpha_1} = 0$$

$$\text{D'où : } \alpha_1 = -e^{\alpha_1}.$$

La fonction Exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc :

$$\blacksquare \text{ Si } x > \alpha_1 \text{ alors } e^x > e^{\alpha_1} \text{ et } x - \alpha_1 > 0$$

$$\text{Donc } e^x - e^{\alpha_1} > 0$$

$$\text{D'où : } e^x + \alpha_1 > 0$$

$$\blacksquare \text{ Si } x < \alpha_1 \text{ alors } e^x < e^{\alpha_1} \text{ et } x - \alpha_1 < 0$$

$$\text{Donc } e^x - e^{\alpha_1} < 0$$

$$\text{D'où : } e^x + \alpha_1 < 0$$

Par suite  $(x - \alpha_1)$  et  $(e^x + \alpha_1)$  ont le même signe.

3) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  par :  $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

a) Montrer que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  et on a pour tout  $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  :

$$\varphi'(x) = \left(e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x\right)' = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Comme  $x \leq -\frac{1}{2}$  alors  $e^x \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$

C'est-à-dire  $e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 0$

$$\varphi'(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] .$$

On déduit que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ .

b) Dédurre que :  $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|x - \alpha_1|$  pour tout  $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ .

$\varphi$  est décroissante sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  et  $\alpha_1 \in \left]-\ln 2; -\frac{1}{2}\right[$  ; alors  $(x - \alpha_1)$  et  $(\varphi(x) - \varphi(\alpha_1))$ .

Et  $\varphi(x) - \varphi(\alpha_1) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x - e^{\alpha_1} + \frac{1}{\sqrt{e}}\alpha_1$  de plus :  $\alpha_1 = -e^{\alpha_1}$  ; d'où :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(\alpha_1)}{x - \alpha_1} = \frac{e^x + \alpha_1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 0$$

Par suite  $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|x - \alpha_1|$  pour tout  $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ .

4) On pose :  $\beta_0 = -\frac{1}{2}$  et  $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer qu'il existe un réel  $a$  tel que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a|\beta_n - \alpha_1|$ .

Montrons par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -\ln 2 \leq \beta_n \leq -\frac{1}{2}$

Pour  $n=0$

On a :  $\beta_0 = -\frac{1}{2}$  donc :  $-\ln 2 \leq \beta_0 \leq -\frac{1}{2}$

Soit  $n \in \mathbb{N}$

Supposons que  $-\ln 2 \leq \beta_n \leq -\frac{1}{2}$  et montrons que :  $-\ln 2 \leq \beta_{n+1} \leq -\frac{1}{2}$ .

$$-\ln 2 \leq \beta_n \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\ln 2} \leq e^{\beta_n} \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq -\beta_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq \beta_{n+1} \leq -\frac{1}{2}$$

Comme  $-\ln 2 \leq -\frac{1}{\sqrt{e}}$  ; alors :  $-\ln 2 \leq \beta_{n+1} \leq -\frac{1}{2}$ .

### Conclusion

On a :  $-\ln 2 \leq \beta_n \leq -\frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après la question précédente:  $|e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$  ; car  $\beta_n \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[$

C'est-à-dire :  $|\beta_{n+1} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$

On déduit que :  $|\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc le réel cherché est  $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

**b) Montrer que la suite  $(\beta_n)$  est convergente et déterminer sa limite.**

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|\beta_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-1} - \alpha_1|$

$$\text{Donc : } \begin{cases} |\beta_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-1} - \alpha_1| \\ |\beta_{n-1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-2} - \alpha_1| \\ \vdots \\ |\beta_2 - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_1 - \alpha_1| \\ |\beta_1 - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_0 - \alpha_1| \end{cases}$$

En multipliant les termes de ces inégalités on obtient :  $|\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |\beta_0 - \alpha_1|$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = 0$  ; car  $-1 < \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$ .

On en déduit que la suite  $(\beta_n)$  est convergente et que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \alpha_1$ .