

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

Partie I

1- a- Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} ; e^t \geq t + 1$

b- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} ; e^{-x} + x - 1 \geq 0$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} ; 1 + (x - 1)e^x \geq 0$

2- Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x)$.

3- a- Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; f'_0(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x}$.

b- En déduire le sens de variation de f_0 et dresser son tableau de variation.

Partie II

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- Etudier les variations de f_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

3- Déterminer les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) .

4- Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe que l'on déterminera

5- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha_n \in]0; 1[$.

6- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$ et en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$.

En déduire que la suite (α_n) est convergente.

7- a- En utilisant **Partie I**, Montrer que : $\forall x \in]0; 1] ; \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$; puis que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$

c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

8- Construire (C_0) et (C_1)