guessmaths

Examen National baccalauréat Session Normale 2023

2éme Bac PC-SVT

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$; $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)$

b) En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d\left(B,(AC)\right)$

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$

a) Vérifier que : $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

b) En déduire que : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=3$.

3) Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$

a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

4) Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2).

Exercice 2 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}+i$, $c=\bar{b}$ et $d=2i$

1) Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

2) a) Vérifier que $b-d=c$

b) Montrer que $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a)=b-d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés.

b) En déduire que $2arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

3) a) Vérifier que : $ac=2b$

b) En déduire que $2arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'.

a) Montrer que $z'=\frac{1}{2}az$

b) En déduire que $R(C)=B$ et que $R(A)=D$

c) Montrer que : $\frac{b-a}{c-a}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$.

Exercice 3

GUESSMATHS.CO

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres: 0; 0; 1; 1; 1; 2 *et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres:* 1; 1; 1; 2; 2.
On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
«On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2 ; ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ».
On considère les événements suivants :
A : "la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1"
B : "le produit ab est égal à 2"
1) a) Calculer $p(A)$; la probabilité de l'événement A.

b) Montrer que $p(B)=\frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

2) Calculer $p(A/B)$; probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.
3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

a) Montrer que : $p(X=0)=\frac{1}{3}$

b) Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4.
c) On considère les événements :
M : " le produit ab est pair non nul" et N : "le produit ab est égal à 1 "
Montrer que les événements M et N sont équiprobables.

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) a) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (On peut poser : $t=\sqrt{x}$)

c) Déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2) Montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$

3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0;+\infty[$:

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	$f'(\beta)$ ↘	0

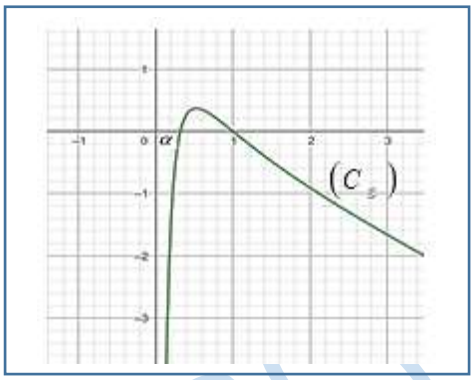
(On donne $\beta\simeq 4{,}9$)

a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.

b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

c) Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion.

4) La courbe (C_g) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \simeq 0{,}3$). Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.



a) A partir de la courbe (C_g), déterminer le signe de la fonction g sur $]0;+\infty[$

b) Déduire que la droite (Δ) est en dessous de (C_f) sur l'intervalle $[\alpha;1]$ et au-dessus de (C_f) sur les intervalles $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$

5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
(On prend : $\alpha \simeq 0{,}3$, $\beta \simeq 4{,}9$ et $f(\beta) \simeq 1{,}9$)

6) a) Vérifier que la fonction $x \mapsto 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha;1]$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\alpha}^{1} (1-\ln x)^2 \, dx = 5(1-\alpha) + \alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$$

c) Déduire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

7) Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 \in]\alpha;1[$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que : $\alpha < u_n < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (On peut utiliser la question 4) b)

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

GUESSMATHS.CO