Exercice 1

PARTIE 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=-x+1+x\ln x$.

1. a. Calculer g' la fonction dérivée de g, puis donner le tableau de variations de g.
   b. On déduire que: $\forall x>0 ; g(x)\geq 0$; puis que la seule solution de l'équation $g(x)=0$ est 1.
2. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=1+2x\ln x$.
   a. Calculer h' la fonction dérivée de h, puis donner le tableau de variations de h.
   b. On déduire que : $\forall x>0 ; h(x)>0$.

PARTIE 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)= x(-1+\ln x)+2\sqrt{x} \ ; \ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

1. a. Montrer que f est continue à droite en $x_0=0$.
   b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. (on peut poser $t=\sqrt{x}$) ; donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
   c. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   d. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$; donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
2. a. Calculer f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$ puis vérifie que : $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}h\left(\sqrt{x}\right)$.
   b. On déduit que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$; donner le tableau de variations de f.
   c. Donner l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_1=1$.
   d. Construire la courbe (C_f) de f et la tangente (Δ) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité de mesure 1 cm.

03. a. Montrer que : $f(x)-x=2\sqrt{x}\,g\left(\sqrt{x}\right)$.
    b. On déduit que : la courbe (C_f) de f est au-dessus de la droite (Δ) .

4. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qu'on détermine.
   b. Vérifier que : $f(1)=1$ puis montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$
   c. Construire $(C_{f^{-1}})$ la courbe de la fonction réciproque f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5. a. Vérifie que : $\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)' = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.

b. On utilise une intégration par parties, montré que : $\int_1^e x\ln x \, dx = \frac{e^2+1}{4}$.

c. Calculer en cm² l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

PARTIE 3 :

6. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \le u_n \le 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. On déduit que (u_n) est une suite convergente.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 29 = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) : y'' - 4y' + 29y = 0$.
3. Déterminer la fonction $g(x)$ solution de l'équation (E) tel que : $g(0) = 1$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}$
4. Le plan complexe (P) étant rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$; on considère les points A et B d'affixes respectivement $a = 5 + 2i$ et $b = -2 + 5i$.

On considère la rotation R de centre le point Ω d'affixe $\omega = -2 + 2i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Etablir que l'écriture complexe de la rotation R est $z' = iz + 4i$.

b. Vérifier que : $c = -2 + 9i$ et $d = 1 + 2i$ les affixes des points C et D tel que : $R(A) = C$ et $R(B) = D$.

c. Montrer que : $(AD) \perp (BC)$ et $AD = BC$.

5. Soit M un point du plan complexe (P) d'affixe $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

On considère le cercle (C) de centre A d'affixe $a = 5 + 2i$ et de rayon 2.

a. Montrer que : $M(z) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

b. Soit le point M' le point du plan complexe (P) d'affixe $z' = x' + y'i$ avec $x' \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}$ l'image de M par la rotation R.

On utilise deux méthodes différentes montrer qu'on a : $|z' - c| = 2$.

6. Soit le point F l'image du point B par l'homothétie h de centre A et de rapport $k = 2$.

a. Montrer que : l'affixe du point F est $f = -9 + 8i$.

b. Sans faire des calculs donner les caractéristiques du cercle (Γ') l'image du cercle (Γ) de centre B et de rayon $r_\Gamma = 4$.

Exercice 3

On considère un dé avec 6 faces dont quatre faces portent le numéro 2 et deux faces portent le numéro 3 ; un sac contient cinq pièces de monnaie dont deux pièces de monnaie de 5 DH et deux pièces de monnaie de 2 DH et une pièce de monnaie de 1 DH.

1ère expérience : On lance le dé une fois.

- Si on obtient le numéro 2 on tire successivement et sans remise deux pièces de monnaie de l'urne.
- Si on obtient le numéro 3 on tire simultanément trois pièces de monnaie de l'urne.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   A « le dé donne le numéro 2 »
   B « la somme des pièces de monnaie tirées est 6 DH »
   C « la somme des pièces de monnaie tirées est 5 DH »

2ème expérience :

- On tire une pièce de monnaie l'une après l'autre et sans remise et on s'arrête de tirer les pièces de monnaie lorsque la somme des pièces de monnaie tirées est au moins 5 DH.
- On considère la variable aléatoire X définie par « le nombre des pièces de monnaie tirées lorsqu' on s'arrête ».

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs de X).
2. Montrer que : $p(X=2)=\dfrac{3}{10}$ et $p(X=3)=\dfrac{3}{10}$.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
4. On déduit que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X)=\dfrac{19}{10}$.
5. calculer $V(X)$ la variance de la variable aléatoire X. on déduit $\sigma(X)$ l'écart-type de X.

Exercice 4

L'espace (E) étant rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère :

- Le plan (P) définie par l'équation cartésienne suivante : $2x+y-z+6=0$.
- Les deux points $A(0;2;2)$ et $B(1;2;-1)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et orthogonale à (P) .
2. Déterminer les coordonnées du point H l'intersection de (D) et (P) .
3. Calculer la distance du point A au plan (P) .
4. Soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace (E) qui vérifie l'équation suivante : $x^2+y^2+z^2-4y-4z-1=0$.
   Montrer que (S) est une sphère ; on précise son rayon R et les coordonnées de son centre Ω
5. a. Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) .
   b. Donner R le rayon de (C) .
   c. Déterminer les coordonnées du point I le centre de (C) .
6. Soient $u(4;1;0)$ et $v(2;1;-1)$ deux vecteurs de l'espace (E) .
   a. Calculer : $u\ v \wedge$; est ce que u et v son colinéaires .

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) passant par B orienté par u et v on utilise deux méthodes complètement différentes.

c. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite(Δ) .

d. Déterminer un vecteur directeur de la droite(Δ) .

e. Donner une représentation paramétrique de la droite(Δ) .