Exercice 1

la sphère (S) *de centre* $\Omega(2,1,2)$ *et de rayon R=3 ; et le plan (P) qui passe par le point* $A(-1,0,3)$ *et dont* $\vec{u}(4,0,-3)$ *est un vecteur qui lui est normal .*

1. $\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(S)\right)/\,(S)$ *est la sphére de centre* $\Omega(2;1;2)$ *et de rayon* $R=3$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Omega M}\|=3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=3$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-4z+4=9$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z+=0$$

Donc : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ *est une équation cartésienne de la sphère* (S).

2. $\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(P)\right)\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y\\z-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)\times 4+y\times 0+(z-3)\times(-3)=0$$
$$\Leftrightarrow 4x+4-3z+9=0$$
$$\Leftrightarrow 4x-3z+13=0$$

D'où : $4x-3z+13=0$ *est une équation cartésienne du plan (P).*

3. *a)* (Δ) *la droite qui passe par* $\Omega(1,0,1)$ *et qui est perpendiculaire au plan (P).*

Alors $\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(\Delta)$ *on a* $\overrightarrow{\Omega M}$ *et* $\vec{u}$ *sont colinéaires ;d'où :*

$$(\exists t\in IR)/\,\overrightarrow{\Omega M}=t\times\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=4t\\ y-1=0.t \quad (t\in IR).\\ z-2=-3t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2+4t\\ y=1 \quad (t\in IR)\\ z=2-3t\end{cases}$$

D'où : $\begin{cases}x=2+4t\\ y=1 \quad (t\in IR)\\ z=2-3t\end{cases}$ *est une représentation paramétrique de* (Δ) .

b) Les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan(P)

Vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \\ 4x-3z+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \\ 4(2+4t)-3(2-3t)+13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \\ 25t+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ t = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow H\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5} \\ 1 \\ \dfrac{19}{5} \end{pmatrix}$$

les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (P) .

3. a) On a : $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|4x_\Omega - 3z_\Omega + 13|}{\|\vec{u}\|}$

$$= \frac{|4\times 2 - 3\times 1 + 13|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{15}{5}$$

$$= 3$$

$d(\Omega;(P)) = R$ donc le plan (P)est tangent à la sphère (S) et leur point de contact est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) or ce point est intersection de la droite (Δ) et du plan(P) donc c'est le point $H\left(-\dfrac{2}{5};2;\dfrac{19}{5}\right)$.

Exercice 2

(Les nombres complexes)

1- Soit l'équation : $(E): z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4\times 4 = 8 - 16 = -8$

On a $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - i\sqrt{8}}{2\times 1} = \sqrt{2}(1-i) \quad et \quad z_2 = \sqrt{2}(1+i)$$

D'où $S = \left\{\left(\sqrt{2}(1-i)\right);\left(\sqrt{2}(1+i)\right)\right\}$

2- Soit $A\left(a = \sqrt{2}(1-i)\right)$

R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

a) On a : $a=\sqrt{2}(1-i) \Rightarrow |a|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

Donc $\quad a=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow a=2\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc : $a=a=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) On a : $B=R(A) \Leftrightarrow b=a\times e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow b=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow b=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

Donc : $b=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

3- a) $C(c=1+i)$ $\;t\;$ la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

On a : $b^2-c^2=2^2\times\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2-(1+i)^2$

$$=4\times\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin 6\right)-2i$$

$$=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{1}{2}i-2i=2\sqrt{3}$$

Donc : $b^2-c^2=2\sqrt{3}$

b) On a : $D=t(B) \Leftrightarrow d=b+c$

$$\Leftrightarrow |d|=|b+c|$$

$$\Leftrightarrow OD=|b+c|$$

c) On en déduit que :

$$OD\times BC=|b+c|\times|c-b|$$

$$=|(b+c)(c-b)|$$

$$=|c^2-b^2|$$

$$=2\sqrt{3}$$

Donc : $OD\times BC=2\sqrt{3}$

Exercice 3

Une caisse contient 12 boules (indiscernables au toucher)

- *3 boules Rouges portent chacune le numéro 1.*

- *3 boules Rouges portent chacune le numéro 2.*
- *6 boules Vertes portent chacune le numéro 2.*

On tire au hasard, simultanément deux boules de la caisse.

$Card\Omega = C_{12}^2 = 66$

1. ■ *A « les boules tirées portent le même numéro»*

$$CardA = C_3^2 + C_9^2 = 39$$

$$Donc :\ P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{39}{66}$$

$$D'où :\ P(A) = \frac{13}{22}$$

■ *B « les boules tirées sont de couleurs différentes»*

$$CardB = C_6^1 \times C_6^1 = 36$$

$$Donc :\ P(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{36}{66}$$

$$D'où :\ P(B) = \frac{6}{11}$$

■ *C « la somme des numéros que portent les boules tirées est égale à 3 »*

$$CardC = C_3^1 \times C_9^1 = 27$$

$$Donc :\ P(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{27}{66}$$

$$D'où :\ P(C) = \frac{9}{22}$$

2. *a) Ona* : $(A \cap B)$ *« Obtenir 2 boules qui portent le même numéros et de couleurs différentes»*

$$Card(A \cap B) = C_3^1 \times C_6^1 = 18$$

$$Donc :\ P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card\Omega} = \frac{18}{66}$$

$$D'où :\ P(A \cap B) = \frac{3}{11}$$

c) On a : $P(A) \times P(B) = \frac{13}{22} \times \frac{6}{11} \neq \frac{3}{11}$

Donc : $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$

D'où les événements A et B ne sont pas indépendants.

2. *l'événement « Sachant que B est réalisé ; obtenir deux boules qui portent le même numéro » est A sachant B ; Calculons* $P_B(A)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc : $P_B(A) = \frac{1}{2}$

Exercice 4

1. a) On a : $H'(x)=\left(xe^{x}\right)'=e^{x}+xe^{x}$

$=(x+1)e^{x}$

Donc la fonction $H:x\mapsto xe^{x}$ est une fonction primitive de la fonction $h:x\mapsto (x+1)e^{x}$ sur IR .

b) On a : $\int_0^1 (x+1)e^{x}dx=\left[H(x)\right]_0^1$

$=H(1)-H(0)$

$=e$

Donc : $\int_0^1 (x+1)e^{x}dx=e$

2- En utilisant une intégration par partie calculons : $\int_0^1 \left(x^2+2x-1\right)e^{x}dx$

On pose : $u(x)=x^2+2x-1 \qquad u'(x)=2x+2$

$v'(x)=e^{x} \qquad v(x)=e^{x}$

On a : $\int_0^1 \left(x^2+2x-1\right)e^{x}dx=\left[\left(x^2+2x-1\right)e^{x}\right]_0^1-\int_0^1 (2x+2)e^{x}dx$

$=2e+1-2\int_0^1 (x+1)e^{x}dx$

$=2e+1-2e$

$=1$

Donc : $\int_0^1 \left(x^2+2x-1\right)e^{x}dx=1$

Probléme

I- g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$

Et son tableau de variation ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

1. On a : $g(1)=1^3-1-2\ln^2 1+2\ln 1=0$

2. D'après le tableau de variation de g ; la fonction est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et comme on a $g(0)=0$ alors on a : $\left(\forall x\in]0;1]\right)\ g(x)\le 0$ et $\left(\forall x\in [1;+\infty[\right)\ g(x)\ge 0$.

II – f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}+\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

1. a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}+\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

$$= +\infty \qquad \left(Car : \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \ et \ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 0 \right)$$

b) On a : $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right) = 0$

D'où la droite (D) d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ *est une asymptote oblique à la courbe(C) admet au voisinage de* $+\infty$.

c)Etudions le signe de : $\left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$

$$\left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] = \left(\frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right) > 0 \qquad \left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right)$$

On en déduit que la courbe(C) est au-dessus de la droite (D) sur $\left]0;+\infty\right[$.

2. *On a :* $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right)$

$$= +\infty \qquad \left(Car : \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2x^2} = +\infty \ et \ \lim_{x\to0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = +\infty \right)$$

<u>Interprétation géométrique</u>

La courbe(C) admet l'axe des ordonnées comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

a) On a : $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right) \quad f'(x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right)'$

$$= 1 - \frac{4x}{(2x^2)^2} + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)' \times \left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= \frac{x^3}{x^3} - \frac{4}{4x^3} + 2\frac{\frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x} - \ln x}{x^2} \times \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{x^3 - 1}{x^3} + \frac{2(1 - \ln x) \times \ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

Donc : $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) D'après la question I-2- on a :

- $\left(\forall x \in \left]0;1\right]\right) \quad g(x) \le 0$ *Donc :* $f'(x) \le 0$.
- $\left(\forall x \in \left[1;+\infty\right[\right) \quad g(x) \ge 0$ *Donc* $f'(x) \ge 0$.

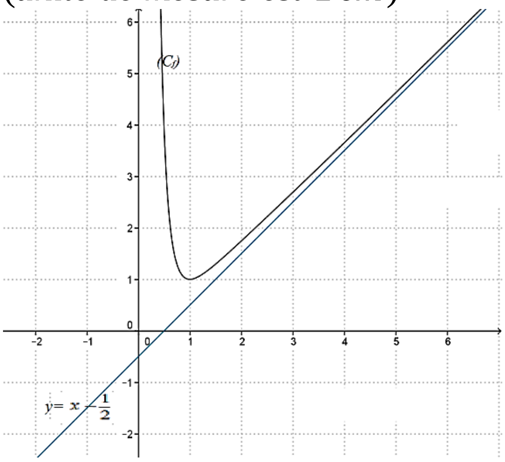
D'où la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]0,1\right]$ *et croissante sur l'intervalle* $\left[1,+\infty\right[$.

c) <u>Tableau de variation de f</u> .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3. Construction de la courbe(C) et la droite (D). dans le repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

(unité de mesure est 1 cm)

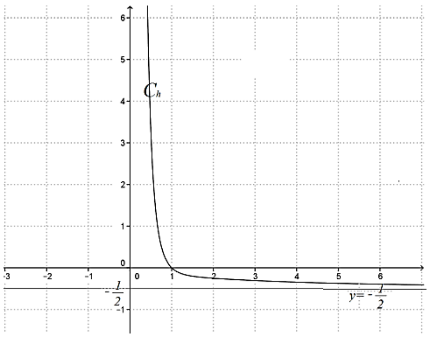


III- la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$h(x) = f(x) - x$

1. a) Verifier que : $h(1) = f(1) - 1 = 0 \qquad \left(f(1) = 1\right)$

b) D'après le graphique ci-dessous $\left(C_h\right)$ est la courbe de la fonction h.



■ $h\left(x\right) \geq 0$ sur l' intervalle $]0,1]$.

■ $h\left(x\right) \leq 0$ sur l' intervalle $[1,+\infty[$.

On en déduit que pour tout x dans l'intervalle $[1,+\infty[$ on a : $f(x) \leq x$.

2. La suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = f(U_n) \qquad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que $P(n): 1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n.

- <u>Initialisation</u>

  <u>Pour n=0</u> On a : $1 \leq U_0 = e \leq e$ Donc p(0)est vraie.

- <u>Hérédité</u>

<u>Supposons que pour $n \in IN$</u> $P(n)$ est vraie : $1 \leq U_n \leq e$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie : $0 \leq U_{n+1} \leq e$

On a : $1 \leq U_n \leq e$ et comme f est croissante sur $[1,+\infty[$ alors :

$$1 \leq U_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$$
$$\Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq f(e) \leq e$$

$$\left(\begin{aligned} f(e) &= e - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2} + \left(\frac{\ln e}{e}\right)^2 \\ &= e + \left(\frac{3-e^2}{2e^2}\right) \leq e \qquad \left(car : \frac{3-e^2}{2e^2} < 0\right) \end{aligned}\right)$$

Donc $P(n+1)$ est vraie : $0 \leq U_{n+1} \leq e$

- <u>Conclusion</u>

  On a montré par récurrence que $P(n): 1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n.

b) (D'après la question III-1-b))on a : $h(x) \leq 0$ sur $[1,+\infty[$.

Et comme $1 \leq U_n \leq e$;alors : $h(U_n) \leq 0 \Leftrightarrow f(U_n) - U_n \leq 0$

Donc : $(\forall n \in IN)$ $U_{n+1} \leq U_n$

D'où la suite (U_n) est décroissante

c) La suite (U_n) est minorée par 1 et décroissante donc elle est convergente.

On a :

$$\begin{cases} f(U_n) = U_{n+1} \\ f([0;1]) \subset [0;1] \\ f \text{ est continue sur } [0;1] \\ U_0 \in [0;1] \\ (U_n) \text{ est convergente} \end{cases}$$

si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ alors l est solution de l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$.

D'après le graphique de h $x = 1$ est la seule solution d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.