3- Résolution d'équations trigonométriques

3-1. Équation $\sin x = a$

Soit a un réel donné. L'équation $\sin x = a$ possède :

- aucune solution si $a \notin [-1;1]$;
- une infinité de solution si $a \in [-1;1]$.

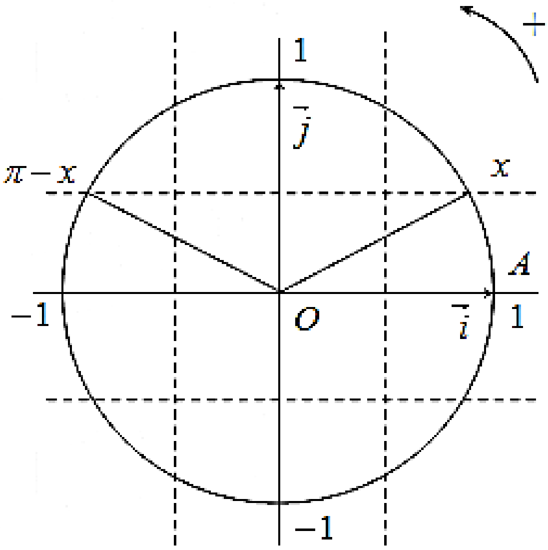
$x = Arc\sin a$ désigne l'unique solution comprise dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est :

$x = Arc\sin a + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

ou

$x = \pi - Arc\sin a + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.



3-2. Équation $\cos x = a$

Soit a un réel donné. L'équation $\cos x = a$ possède :

- aucune solution si $a \notin [-1;1]$;
- une infinité de solution si $a \in [-1;1]$.

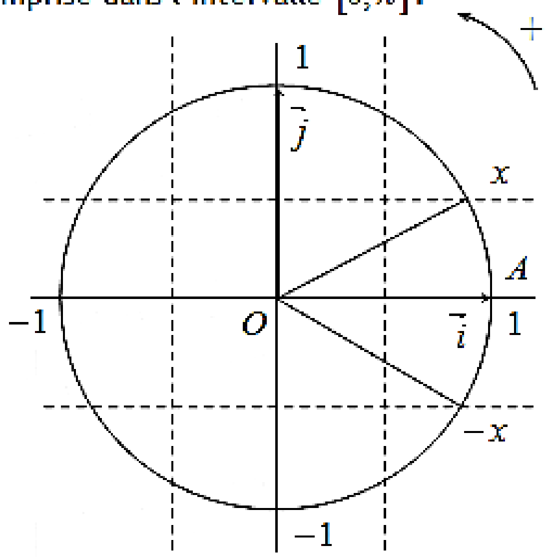
$x = Arc\cos a$ désigne l'unique solution comprise dans l'intervalle $[0;\pi]$.

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est :

$x = Arc\cos a + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

ou

$x = -Arc\cos a + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.



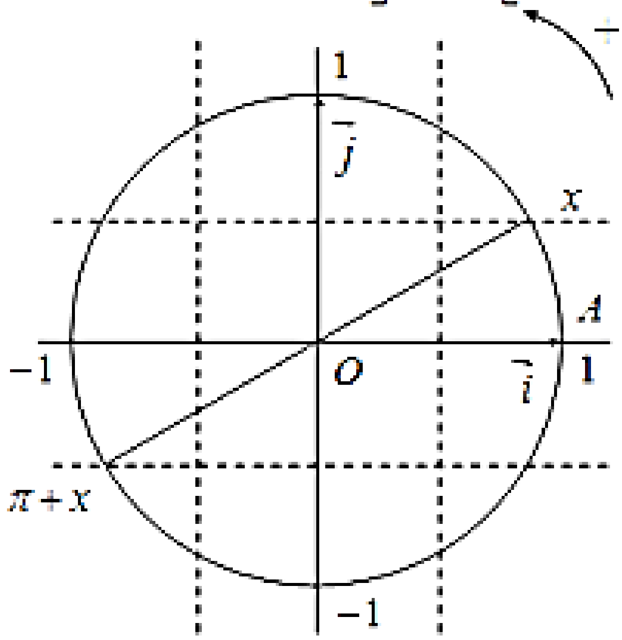
3-3. Équation $\tan x = a$

Soit a un réel donné. L'équation $\tan x = a$ possède une infinité de solution quel que soit la valeur de a.

$x = Arc\tan a$ désigne l'unique solution comprise dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est :

$x = Arc\tan a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$



3-4. Équation $a\cos x + b\sin x = c$

Il s'agit de résoudre l'équation suivante :

$$a\cos x + b\sin x = c$$

où a, b et c sont des réels donnés.

Les nombres $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sont tels que la somme de leurs carrés est égale à 1.

Il existe donc un réel φ tel que : $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

L'équation s'écrit alors : $\sqrt{a^2+b^2}\left[\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x\right] = c$.

On en déduit l'égalité suivante :

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La résolution de l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ se ramène donc à la résolution d'une équation du type $\sin X = A$ avec :

$$X = x + \varphi \quad \text{et} \quad A = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

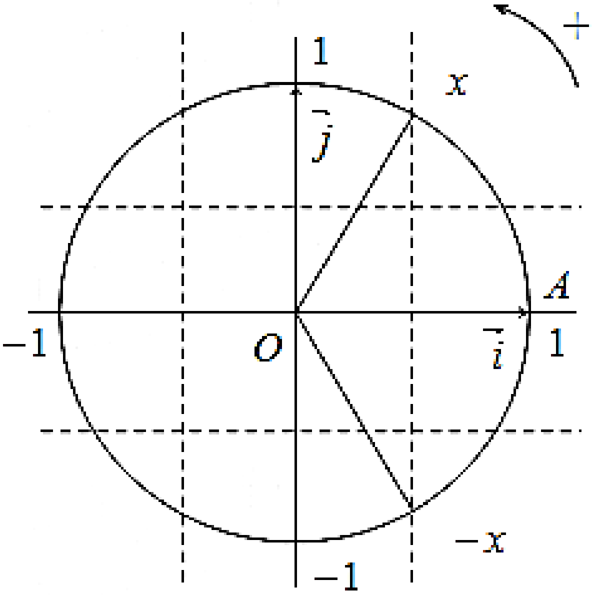
3-5. Résolution d'inéquations trigonométriques

On commence par résoudre une inéquation sur une période, puis on énonce l'ensemble des solutions en effectuant des translations d'un nombre entier de périodes.

- **Exemple**

Résoudre sur $\left[-2\pi, 2\pi\right]$ l'inéquation :

$$\cos x > \frac{1}{2}$$



- **Solution**

On commence par résoudre l'inéquation sur l'intervalle $\left[-\pi, \pi\right]$:

L'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ a pour solution

$x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}$ dans l'intervalle $\left[-\pi, \pi\right]$.

L'inéquation a donc pour solution $S_1 = \left]-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right[$ dans l'intervalle $\left[-\pi, \pi\right]$.

L'ensemble des solutions dans l'intervalle $\left[-2\pi, 2\pi\right]$ est la réunion de tous les intervalles de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right[$.

Sur $\left[-\dfrac{\pi}{3} - 2\pi, \dfrac{\pi}{3} + 2\pi\right]$ l'ensemble des solutions est :

$$S_2 = \left]-\frac{\pi}{3} - 2\pi, \frac{\pi}{3} - 2\pi\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3} + 2\pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right[$$

Finalement sur $\left[-2\pi, 2\pi\right]$ l'ensemble des solutions est :

$$S = \left[-2\pi; \frac{\pi}{3} - 2\pi\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3} + 2\pi, 2\pi\right]$$

Exercice 1

On considère l'inéquation $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$

Résoudre cette équation sur $[0;2\pi]$ puis sur $]-\pi;\pi]$.

Exercice 2

On considère l'inéquation $\cos(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Résoudre cette équation sur $[0;2\pi]$ puis sur $]-\pi;\pi]$.

Exercice 3

On considère l'inéquation $\cos(2x) \geq \frac{1}{2}$

Résoudre cette équation sur $[-\pi;\pi]$

Exercice 4

On considère l'inéquation $-2\sin(3x)+1 \geq 0$.

Résoudre cette équation sur $[-\pi;\pi]$.