Exercice 1

Soit F une fonction définie par: $F(x)=\int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^4}dt$

1) Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
3) Etudier le signe de F.
4) Montrer que F est paire

Exercice 2

On considère la fonction g définie par : $g(x)=\int_x^{2x} e^{-t^2}dt$

1) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est impaire.
2) Montrer que g est dérivable ; puis calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
3) a) Montrer que pour tout réel $x>1$; on a : $xe^{-4x^2}\le g(x)\le xe^{-x^2}$

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

   c) Dresser le tableau de variation de g ; on précisera la valeur $g(0)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t^2}}{t}dt \\ f(0)=\ln 2\end{cases}$.

1) Montrer que la fonction f est paire
2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $f'(x)=\frac{e^{-4x^2}}{x}\left(1-e^{3x^2}\right)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$

   b) Déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$; $e^x\ge x+1$.

   b) Déduire que : $(\forall t>1)$; $\frac{1}{t}-t\le\frac{1}{t}e^{-t^2}\le\frac{1}{t}$

   c) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\ln 2-\frac{3}{2}x^2\le f(x)\le\ln 2$

   d) Montrer que f est continue et dérivable en 0.
4) a) Montrer que : $(\forall x>1)$; $0\le f(x)\le\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$

   b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\int_x^{2x}\ln(e^t-1)dt & si\ \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln(e^t-1)$.

b) Déduire que : $(\forall x\in]0;+\infty[);\ x\ln(e^x-1)\leq f(x)\leq x\ln(e^{2x}-1)$

c) Montrer que f est continue à droite en 0 ; puis étudier la dérivabilité de f a droite en 0.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; pues étudier la branche infinie de la courbe de f.

3) a) Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[);\ f'(x)=\ln(e^{3x}+e^{2x}-e^x-1)$

b) Etudier les variations de la fonction u définie sur $[0;+\infty[$ par :

$u(x)=e^{3x}+e^{2x}-e^x-2$.

c) Déduire qu'il existe un réel α dans $\left]\ln\frac{6}{5};\ln\frac{5}{4}\right[$ tel que : $u(\alpha)=0$ et $f'(\alpha)=0$.

d) Etudier les variations de f et vérifier que : $f(\alpha)<0$; puis déduire qu'il existe un réel β ; tel que : $\alpha<\beta<\ln 2$ et $f(\beta)=0$.

4) Etudier le signe de l'intégrale $\int_x^{2x}\ln(e^t-1)dt$; pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Exercice 5

partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x-1} & si\ \ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) Montrer que f est Continue en 0.

2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $1+(x-1)e^x\geq 0$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$; puis étudier les variations de f.

partie II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\dfrac{t}{e^t-1}dt & si\ \ x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$

1 a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\leq F(x)\leq\dfrac{x^2}{e^x-1}$

b) Montrer que F est continue en 0.

c) Montrer que F est dérivable en 0 et que : $F'(0)=1$.

2) a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $F'(x) = \frac{3-e^x}{e^x+1} f(x)$

b) Dresser le tableau de variations de F.

Exercice 6

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$; $\begin{cases} f_n(x) = \int_0^1 t^n e^{-tx} dt \\ f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx} dt \end{cases}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; f_n est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$; $f_n(0) = \frac{1}{n+1}$;puis déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

2) a) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right);\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)$; $f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{e^{-x}}{x}$

b) Calculer $f_0(x)$ en fonction de x ; puis déduire $f_1(x)$ et $f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.