

guessmaths

Correction examen nationale 2021 Session Normale

2ème Bac SM A et B

Exercice 1:

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx ; (\forall x \in \mathbb{R})$$

Partie I:

$$\begin{aligned} 1- a) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2e^x}{1+e^x} + nx - nx + 2 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2e^x + 2 + 2e^x}{1+e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1+e^x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2) = 0$$

Interprétation graphique

(C_n) admet la droite d'équation $y = nx - 2$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} b) \text{ On a : } & \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2e^x}{1+e^x} + nx \right) = -\infty & (\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0) \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2e^x}{x + xe^x} + n \right) = n & (\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0) \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (f_n(x) - nx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2e^x}{1+e^x} + nx - nx \right) \\ & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2e^x}{1+e^x} \right) = 0 & (\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0) \end{aligned}$$

Interprétation graphique

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = n \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f_n(x) - nx) = 0$$

Alors (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) d'équation $y = nx$.

2- a) la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et somme de fonctions

$$\text{dérivables sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R} ; \text{ on a : } f'_n(x) = \left(\frac{-2e^x}{1+e^x} + nx \right)'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2e^x(1+e^x) + 2e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} + \eta \\
&= \frac{-2e^x - 2e^{2x} + 2e^{2x}}{(1+e^x)^2} + \eta \\
&= \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + \eta
\end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'_\eta(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + \eta$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $1 - \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} \geq 0$$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

c) • Pour $n = 0$

Etudions les variations de f_0 sur $\mathbb{R}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'_0(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} \leq 0$

Donc f_0 est décroissante sur $\mathbb{R}$

• Pour $n \geq 1$

Etudions les variations de f_n sur $\mathbb{R}$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + \eta$

$$\begin{aligned}
\text{et } \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1 &\Rightarrow \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \leq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + \eta \geq \eta - \frac{1}{2} > 0 \\
&\Rightarrow f'_n(x) > 0
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$ f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3- a) Une équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0 ; est :

$$y_n = f'_n(0)(x - 0) + f_n(0)$$

Donc $y_n = \left(\eta - \frac{1}{2}\right)x - 1$

b) Calculons $f_n''(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $f_n''(x) = \left(\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + \eta \right)'$

$$= \frac{-2e^x(1+e^x)^2 + 4e^x e^x (1+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{2e^x(1+e^x)(-(1+e^x) + 2e^x)}{(1+e^x)^4}$$

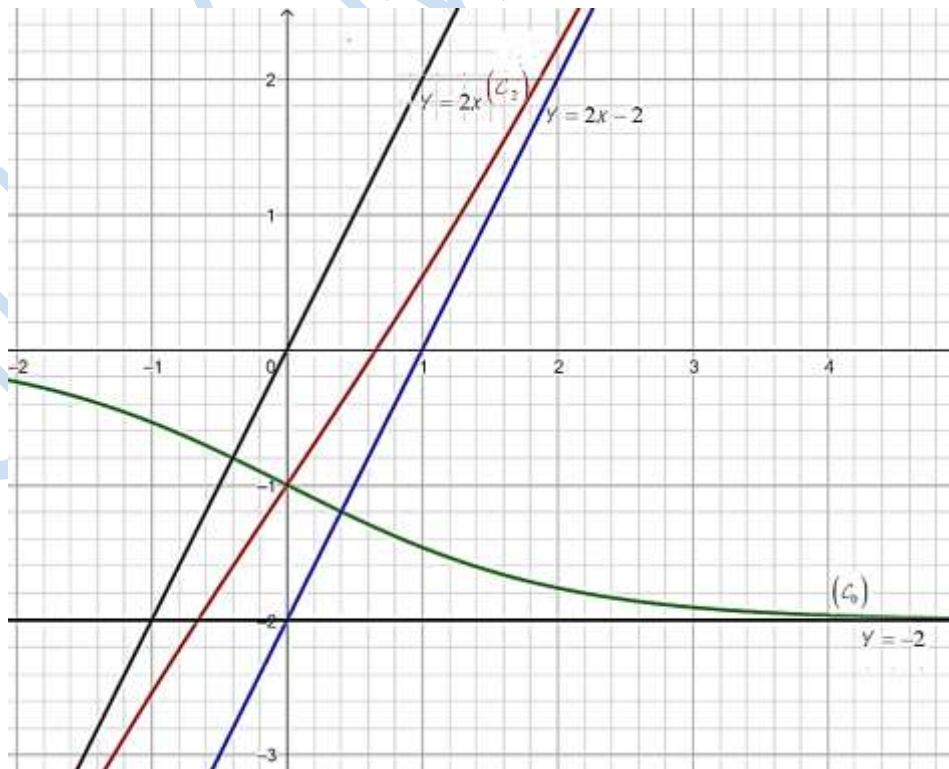
$$= \frac{2e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}$$

Donc $f_n''(x)$ est du même signe que $(e^x - 1)$; d'où tableau de signe de $f_n''(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n''(x)$	—	0	+

Donc $f_n''(x)$ s'annule et change de signe en une seule valeur qui est 0 ; ainsi le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

4- Construction dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des deux courbes (C_0) et (C_2) .



$$\begin{aligned}
 5- a) \text{ Pour tout réel } t > 0, \text{ on a : } A(t) &= \int_0^t |f_n(x) - (nx - 2)| dx \\
 &= \int_0^t \left| \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx - (nx - 2) \right| dx \\
 &= \int_0^t \left| \frac{2}{1+e^x} \right| dx \\
 &= 2 \int_0^t \left(\frac{(1+e^x) - e^x}{1+e^x} \right) dx \\
 &= 2 \int_0^t \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx \\
 &= 2 \left[x - \ln(1+e^x) \right]_0^t \\
 &= 2(t - \ln(1+e^t) + \ln 2) \\
 &= 2(\ln e^t + \ln 2 - \ln(1+e^t)) \\
 &= 2(\ln(2e^t) - \ln(1+e^t)) \\
 &= 2 \ln \left(\frac{2e^t}{1+e^t} \right) \\
 &= 2 \ln \left(\frac{2}{1+e^{-t}} \right)
 \end{aligned}$$

Donc $A(t) = 2 \ln \left(\frac{2}{1+e^{-t}} \right) \text{ cm}^2$; pour tout $t > 0$

b) On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(\frac{2}{1+e^{-t}} \right) = 2 \ln 2$ (car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$)

Partie II :

$$(u_n)_{n \geq 0} : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_0(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1- a) On considère la fonction $h(x) = f_0(x) - x$

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; comme somme de deux fonctions qui le sont.

D'une part on a : $h'(x) = f_0'(x) - 1$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} - 1 \\
 &= \frac{-(2e^x + (1+e^x)^2)}{(1+e^x)^2} < 0
 \end{aligned}$$

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; ainsi h est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $h(\mathbb{R})$

$$h(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - x), \lim_{x \rightarrow -\infty} (f_n(x) - x) \right[=]-\infty, +\infty[$$

Et $0 \in]-\infty, +\infty[$; d'après le théorème de la bijection l'équation $h(x) = 0$ c-à-d $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} b) \text{ On a : } (\forall x \in \mathbb{R}) : \bullet \quad f'_0(x) - \frac{1}{2} &= \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{2} \\ &= -\left(\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{1}{2} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f'_0(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'_0(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-4e^x + (1+e^x)^2}{2(1+e^x)^2} \\ &= \frac{(1-e^x)^2}{2(1+e^x)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f'_0(x) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } (\forall x \in \mathbb{R}) : |f'_0(x)| \leq \frac{1}{2}$$

2- a) f_0 est continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ tel que $\alpha \in]a, b[$ et $u_n \in]a, b[$;

$$|f'_0(x)| \leq \frac{1}{2} ; \text{ donc d'après l'inégalité des accroissements finis}$$

$$\text{Pour tout couple } (x, y) \in I^2 ; \text{ on a : } |f_0(x) - f_0(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

$$\text{En particulier pour } (u_n; \alpha) \in I^2$$

$$\text{On a : } |f_0(u_n) - f_0(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

b) D'après la question précédente on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$$

$$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-2} - \alpha|$$

$$|u_{n-2} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-3} - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_0 - \alpha|$$

En multipliant les membres des inégalités ; on obtient :

$$|u_n - \alpha| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} |u_0 - \alpha|$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$$

$$c) \text{ On a : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha| \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ (car } -1 \leq \frac{1}{2} \leq 1)$$

$$\text{Donc } (u_n)_{n \geq 0} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

Partie III :

On suppose que $n \geq 2$

1- a) On sait que pour tout entier $n \geq 2$, f_n est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } f_n(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[=]-\infty ; +\infty[; \text{ et } 0 \in]-\infty ; +\infty[$$

Donc d'après TVI il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$

$$b) \text{ pour tout entier } n \geq 2, \text{ On a : } f_n(0) = -1 ; f_n(x_n) = 0 \text{ et } f_n(1) = \frac{-2e}{1+e} + n$$

$$\text{D'autre par } \frac{e}{1+e} < 1 \Rightarrow \frac{-2e}{1+e} > -2$$

$$\Rightarrow \frac{-2e}{1+e} + n > n - 2 > 0$$

$$\text{Donc } f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$$

Comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Alors tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$

$$\begin{aligned}
 2- a) \text{ pour tout entier } n \geq 2 ; \text{ on a : } f_{n+1}(x_n) &= \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + (n+1)x_n \\
 &= \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n + x_n \\
 &= f_n(x_n) + x_n \\
 &= x_n \quad (\text{car } f_n(x_n) = 0)
 \end{aligned}$$

Donc $f_{n+1}(x_n) > 0$ (car d'après la question précédente $x_n > 0$)

b) pour tout entier $n \geq 2$; on a : $f_{n+1}(x_n) > 0$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

Donc $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$; Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

On en déduit que : $(\forall n \geq 2) ; x_n > x_{n+1}$

D'où la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

c) la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

$$\begin{aligned}
 3- a) \text{ Pour tout entier } n \geq 2 ; \text{ On a : } f_n(x_n) &= \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n \\
 &= f_0(x_n) + nx_n
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f_0(x_n) = -nx_n$$

D'autre part on a : $0 < x_n < 1$ et f_0 est décroissante ; alors :

$$f_0(1) < f_0(x_n) < f_0(0) \Rightarrow \frac{-2e}{1+e} < -nx_n < -1$$

$$\Rightarrow 1 < nx_n < \frac{2e}{1+e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e} \right)$$

$$b) \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e} \right) = 0 ; \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0,$$

$$\bullet \text{ On a : } f_n(x_n) = 0 \Rightarrow \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n = 0$$

$$\Rightarrow nx_n = \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$$

4- a) Pour tout entier $n \geq 2$; la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante

$$\text{Donc } x_n \leq x_2$$

$$\begin{aligned} \text{b) Pour tout entier } n \geq 2 ; \text{ on a : } & \begin{cases} 0 < x_n \leq x_2 \\ 0 < x_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < (x_n)^n \leq (x_2)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_2)^n = 0 \end{cases} \\ & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = 0 \end{aligned}$$

Exercice 2:

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a + b \neq c$

$$1- \text{a) } (E): z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$$

Le discriminant de (E) est

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+b+c)^2 - 4c(a+b) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 4ac - 4bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac \\ &= a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2b(-c) + 2a(-c) \\ &= (a+b-c)^2 \end{aligned}$$

Donc $(a+b-c)$ est une racine de Δ

D'où les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{(a+b+c) - (a+b-c)}{2} = c \text{ et } z_2 = \frac{(a+b+c) + (a+b-c)}{2} = a+b$$

$$\text{Ainsi } S = \{(z_1 = a+b); (z_2 = c)\}$$

$$\text{b) On a : } a = i ; b = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } c = a - b$$

$$\bullet z_1 = a + b$$

$$\begin{aligned} &= i + e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})}{2}} \left(e^{i\frac{(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})}{2}} + e^{i\frac{(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i\frac{5\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{-\pi}{12}} \right) \\
&= 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}} \quad \text{on a ; } 0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2} ; \text{ donc } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } z_1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$\bullet z_2 = a - b$$

$$\begin{aligned}
&= i - e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= e^{i\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{2}} \left(e^{i\frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}{2}} - e^{i\frac{\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{2}} \right) \\
&= e^{i\frac{5\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{-\pi}{12}} \right) \\
&= 2i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}} \\
&= 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{11\pi}{12}} \quad \text{on a ; } 0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2} ; \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } z_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

2- Les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ non alignés.

a) • Soit R_p la rotation de centre $P(p)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A

$$\begin{aligned}
\text{On a : } R_p(B) = A &\Leftrightarrow a - p = (b - p) e^{i\frac{\pi}{2}} \\
&\Leftrightarrow a - p = (b - p) i \\
&\Leftrightarrow a - p = ib - ip \\
&\Leftrightarrow (i - 1)p = ib - a \\
&\Leftrightarrow 2p = (ib - a)(-1 - i) \\
&\Leftrightarrow 2p = -ib + a + b + ia
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2p = a + b + (a - b)i$$

- Soit R_Q la rotation de centre $Q(q)$ et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A

$$\text{On a : } R_Q(C) = A \Leftrightarrow a - q = (c - q)e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a - q = (c - q) \times (-i)$$

$$\Leftrightarrow a - q = (-ic + iq)$$

$$\Leftrightarrow (1 + i)q = a + ic$$

$$\Leftrightarrow 2q = (a + ic)(1 - i)$$

$$\Leftrightarrow 2q = a + ic - ia + c$$

$$\Leftrightarrow 2q = a + c + (c - a)i$$

- $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$; donc $d = \frac{b + c}{2} = \frac{a}{2}$

$$b) \text{ On a : } \bullet 2p = a + b + (a - b)i \Leftrightarrow p = \frac{a + b}{2} + \left(\frac{a - b}{2}\right)i$$

$$\Leftrightarrow p - d = \frac{a + b}{2} + \left(\frac{a - b}{2}\right)i - \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow p - d = \frac{b}{2} + \left(\frac{a - b}{2}\right)i$$

$$\bullet 2q = a + c + (c - a)i \Leftrightarrow q = \frac{a + c}{2} + \left(\frac{c - a}{2}\right)i$$

$$\Leftrightarrow q - d = \frac{a + c}{2} + \left(\frac{c - a}{2}\right)i - \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow q - d = \frac{c}{2} + \left(\frac{c - a}{2}\right)i$$

$$\Leftrightarrow q - d = \frac{a - b}{2} - \frac{b}{2}i$$

$$\Leftrightarrow i(q - d) = \left(\frac{b}{2} + \left(\frac{a - b}{2}\right)i\right)$$

$$\Leftrightarrow i(q - d) = p - d$$

$$\text{Donc } \frac{p-d}{q-d} = i$$

$$c) \text{ On a : } \frac{p-d}{q-d} = i \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{p-d}{q-d} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{p-d}{q-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} DP = DQ \\ \left(\overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{DP} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Donc le triangle PDQ est rectangle isocèle en D.

3- a) • E le symétrique de B par rapport à P ; Donc P est le milieu du segment [EB]

$$\text{Donc } 2p = z_E + b$$

$$\text{D'où } z_E + b = a + b + (a-b)i \Leftrightarrow z_E = a + (a-b)i$$

• F le symétrique de C par rapport à Q ; Donc Q est le milieu du segment [CF]

$$\text{Donc } 2q = z_F + c$$

$$\text{D'où } z_F + c = a + c + (c-a)i \Leftrightarrow z_F = a + (c-a)i$$

• K le milieu du segment [EF] ; donc l'abscisse de K est :

$$2k = z_E + z_F$$

$$= a + (a-b)i + a + (c-a)i$$

$$= 2a + (c-b)i$$

$$\text{Donc } k = a + \frac{i}{2}(c-b)$$

b) D'une part on a : $\frac{p-d}{q-d} = i$; donc les points P, Q et D ne sont pas alignés.

$$\begin{aligned} \text{D'autre part on a : } \frac{p-k}{q-k} &= \frac{\frac{a+b}{2} + \left(\frac{a-b}{2}\right)i - \left(a + \left(\frac{c-b}{2}\right)i\right)}{\frac{a+c}{2} + \left(\frac{c-a}{2}\right)i - \left(a + \left(\frac{c-b}{2}\right)i\right)} \\ &= \frac{a+b + (a-b)i - (2a + (c-b)i)}{a+c + (c-a)i - (2a + (c-b)i)} \\ &= \frac{(b-a) - (c-a)i}{(c-a) + (b-a)i} \\ &= -\frac{((c-a) + (b-a)i)i}{(c-a) + (b-a)i} = -i \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{q-k}{p-k} = i$$

$$\text{D'où } \frac{p-d}{q-d} \times \frac{q-k}{p-k} = -1 \in \mathbb{R}^*$$

Par suite les points K, P, Q et D sont cocycliques.

Exercice 3:

Partie I :

$$(E): 47x - 43y = 1$$

$$\begin{aligned} 1- \text{On a : } 47 \times 11 - 43 \times 12 &= 47 \times 11 - 43 \times 11 - 43 \\ &= 4 \times 11 - 43 = 1 \end{aligned}$$

Donc le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation (E)

2- Soit (x, y) solution de l'équation (E) et $(11, 12)$ solution particulière de l'équation (E)

$$\begin{aligned} \text{Donc } \begin{cases} 47x - 43y = 1 \\ 47 \times 11 - 43 \times 12 = 1 \end{cases} &\Rightarrow 47(x - 11) - 43(y - 12) = 0 \\ &\Rightarrow 47(x - 11) = 43(y - 12) \\ &\Rightarrow 43 \mid 47(x - 11) \end{aligned}$$

Et comme $43 \wedge 47 = 1$; donc d'après le théorème de GAUSS : $43 \mid (x - 11)$

Donc $x = 11 + 43k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{Et } 47(x - 11) &= 43(y - 12) \Rightarrow 47 \times 43k = 43(y - 12) \\ &\Rightarrow 47k = (y - 12) \\ &\Rightarrow y = 12 + 47k \text{ où } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $y = 12 + 47k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement soit $x = 11 + 43k$ et $y = 12 + 47k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a : } 47(11 + 43k) - 43(12 + 47k) = 47 \times 11 - 43 \times 12 = 1$$

(car le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation (E))

Donc le couple $(11 + 43k; 12 + 47k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation (E)

Par suite l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est :

$$S = \{(11 + 43k; 12 + 47k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Partie II :

$$(F): x^{41} \equiv 4[43]$$

1- Soit $x \in \mathbb{Z}$ solution de l'équation (F)

a) On pose $d = 43 \wedge x$

$$\text{On a : } x^{41} \equiv 4[43] \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \mid x^{41} = 4 + 43k$$

$$\text{Et } \begin{cases} d \mid x \\ d \mid 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x^{41} \\ d \mid 43 \end{cases} \Rightarrow d \mid 4 = (x^{41} - 43k)$$

Donc $d \in \{1; 2; 4\}$ et comme $2 \nmid 43$ et $4 \nmid 43$

Alors $d = 1$

D'où x et 43 sont premiers entre eux.

Et d'après le petit théorème de FERMAT on a : $x^{42} \equiv 1[43]$

$$b) \text{ On a : } \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{42} \equiv 1[43] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \times x^{41} \equiv 4x[43] \\ x^{42} \equiv 1[43] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{42} \equiv 4x[43] \\ x^{42} \equiv 1[43] \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x \equiv 1[43]$$

$$\text{De plus } 4x \equiv 1[43] \Rightarrow 11 \times 4x \equiv 11[43]$$

$$\Rightarrow 44x \equiv 11[43] \quad \text{et comme } 44 \text{ et } 43 \text{ sont premiers entre eux.}$$

On déduit que : $x \equiv 11[43]$

2- Donc toute solution de (F) s'écrit sous la forme $11 + 43k$; où $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement on a : $x = 11 + 43k \Rightarrow x \equiv 11[43]$

$$\Rightarrow 4x \equiv 1[43]$$

$$\Rightarrow x \equiv 1[43] \quad \text{car } 4 \wedge 43 = 1$$

$$\Rightarrow x^{41} \equiv 4[43]$$

Donc $11 + 43k$; où $k \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation (F) .

Par suite l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F) est $S = \{11 + 43k \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

Partie III :

$$(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$$

1- Soit x une solution du système (S)

a) Alors on a : $x^{41} \equiv 4[43]$; et d'après la partie II $x^{41} \equiv 4[43] \Rightarrow x \equiv 11[43]$

Montrons que x et 47 sont premiers entre eux.

Soit $d = x \wedge 47$

On a : $d \mid x$ et $d \mid 47$; donc $d \mid 47$ et $d \mid x^{47}$

D'où $d \mid 10$; or le seul diviseur commun de 10 et 47 c'est 1

Ainsi $d = 1$

Par suite x et 47 sont premiers entre eux et d'après le petit théorème de Fermat on a : $x^{46} \equiv 1[47]$

D'où $x \times x^{46} \equiv x[47] \Rightarrow x \equiv x^{47}[47]$; par commutativité de la congruence

Et $x^{47} \equiv 10[47]$; par transitivité de la congruence

On obtient $x \equiv 10[47]$

Par suite on a montré que : $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases} \Rightarrow (S') : \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$

Réciproquement montrons que : $(S') : \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases} \Rightarrow (S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$

Soit x est solution du système : $(S') : \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$

Montrons que x est solution du système $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases}$

On a : • $x \equiv 11[43]$ et $x^{46} \equiv 1[43]$ car x est solution du système : (S') et x et 43 sont premiers entre eux.

$$\text{Donc } \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x^{42} \equiv 1[43] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x \equiv 1[43] \\ 4x \times x^{41} \equiv 4[43] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x \equiv 1[43] \\ 4x \times x^{41} \equiv 4[43] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{41} \equiv 4[43]$$

• $x \equiv 10[47]$ et $x^{46} \equiv 1[47]$ car x est solution du système : (S') et x et 47 sont premiers entre eux.

$$\text{Donc } \begin{cases} x \equiv 10[47] \\ x^{46} \equiv 1[47] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 10[47] \\ x \times x^{46} \equiv x[47] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 10[47] \\ x^{47} \equiv x[47] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{47} \equiv 10[47]$$

D'où $(S') \Rightarrow (S)$

On conclut que : $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4[43] \\ x^{47} \equiv 10[47] \end{cases} \Leftrightarrow (S') : \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases}$

b) x est solution du système (S) ; donc x est solution du système (S')

$$\text{Donc } \begin{cases} x \equiv 11[43] \\ x \equiv 10[47] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 + 43z \text{ où } z \in \mathbb{Z} \\ x = 10 + 47y \text{ où } y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 47y - 43z - 1 = 0$$

D'où le couple (y, z) est solution de l'équation $(E) : 47x - 43y = 1$

Ainsi $(\exists k \in \mathbb{Z}) / y = 11 + 43k$ et $z = 12 + 47k$

En remplaçant z ou y dans $\begin{cases} x = 11 + 43z \text{ où } z \in \mathbb{Z} \\ x = 10 + 47y \text{ où } y \in \mathbb{Z} \end{cases}$; on obtient

$$\begin{cases} x = 11 + 43(12 + 47k) \\ x = 10 + 47(11 + 43k) \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 527 + 2021k$$

$$\Rightarrow x \equiv 527[2021]$$

2- Donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S) ; est :

$$S_{(S)} = \{527 + 2021k \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$