

Exercices série n°15 sur les fonctions logarithmes

2ème Bac PC- SVT

Exercice 1:

la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{\ln x}$; On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- 1) Montrer que f est continue sur $[1; +\infty[$.
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 ; et Interpréter géométriquement le résultat trouvé.
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Déterminer l'intersection de $(\Delta): y = x$ et (C_f) .
b) Tracer (C_f) et (Δ) .
- 4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0; +\infty[$.
b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 5) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq e$.
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 2:

Partie 1 :

Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$.

- 1) Dresser le tableau de variation de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-1; +\infty[$ deux solutions 0 et α et vérifier que $3,8 < \alpha < 4$
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$.
- 4) Montrer que pour tout x de $]-1; +\infty[$, on a : $g(x) \leq 1$.

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- 1) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
- 2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- 3) Montrer que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.
- 4) Dresser le tableau de variation de f
- 5) vérifier que : $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
- 6) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 3:

Partie A:

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$

- 1) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$ on a : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$
- 2) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B:

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, et (C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm).

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat.
- 3) Montrer que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$., puis donner le tableau de variation de f .
- 4) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
- 5) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$
 - a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
Et vérifier que $e^{-\alpha} = \alpha$.
 - b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) .
- 6) Construire (C_f) et (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 4:

Partie A :

Etude d'une fonction auxiliaire.

g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$

- 1) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B :

Etude d'une fonction.

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

- 1) Montrer que f est continue à droite en 0.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.
- 3) a) Vérifier que : $(\forall x > 0) ; f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; et interpréter le résultat trouvé géométriquement.

4) a) Démontrer que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f .

5) Construire (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 5:

Partie A:

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + (x - 2) \ln x$

a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; g'(x) = 2 \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x$.

b) Etudier les variations de g . Puis en déduire que la fonction g est strictement positive.

Partie B:

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$ et (C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité 2 cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.

3) a) Vérifier que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x}$; et étudier les variations de f .

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

4) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b) Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$.

En déduire le signe de $h(x)$.

c) Montrer que $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$; et en déduire la position de la courbe (C_f) et de (T) .

5) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.