

EXERCICE 1

Soit la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n + \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$; Avec $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Montrer que : $(\exists! a_n \in \mathbb{R}^+) / (f_n(a_n) = 1)$ et que : $0 < a_n < 1$.
- 2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in]0; 1[) ; f_{n+1}(x) < f_n(x)$
b) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; que peut-on conclure ?
- 3) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ (vous pouvez utiliser l'absurde) et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - (a_n)^n) = 1$.

EXERCICE 2

Soient $(a \in]0; 1[$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) et la fonction f_n définie sur $[0; 1]$ par : $f_n(x) = 2x^n - x^{n-1} - a$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) ; (\exists! x_n \in]0; 1[) / f_n(x_n) = 0$ et que : $\frac{1}{2} < x_n$.
- 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) ; f_{n+1}(x_n) < 0$. Puis déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$
- 3) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = a$
- 4) Montrer que : $(\forall n \geq 2) 0 < \frac{x_n - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \leq \frac{(x_n)^n}{na}$ Puis déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\sqrt[n]{a}}$

EXERCICE 3

Soient les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ et $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + n - 1 \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N})$

- 1) a) Montrer que : $(\forall n \geq 3) ; u_{n+1} \leq \frac{8}{9} u_n$ en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente :
b) Calculer les deux limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.
- 2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n \geq n$; En puis déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
- 3) Soient les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k}$ et $t_n = S_n + \frac{(n-2)^2}{2^n}$
a) Montrer que les deux suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n = \frac{v_{n+1} - 1}{2^n}$
- 4) Soit la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; W_n = v_n + n$
Montrer que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique ; puis exprimer W_n et v_n en fonction de n ;
- 5) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$; puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$

EXERCICE 4

Soient les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

On considère la fonction F_n définie sur $[0; +\infty[$ par : $F_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

1) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes ; Que peut-on conclure ?

2) Montrer que : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; F'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

3) Dédire que : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; F_{2n+1}(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq F_{2n}(x)$

4) Déterminer la limite commune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$