Série n ° 3 exercices «Fonctions exponentielles »

Exercice 1

On considère la fonction g, définie par : $g\left(x\right)=3e^{\frac{1}{3}x}-x^2+4x$

et de courbe représentative $\left(C_g\right)$.

1- Calculer la dérivée de la fonction g.

2- Montrer que T , tangente à $\left(C_g\right)$ en 3, a pour équation $y=\left(e-2\right)x+9$.

3- Montrer que T passe par le point $M\left(-1;11-e\right)$.

Corrigé

1- On pose $u(x)=\frac{1}{3}x$ Donc $u'(x)=\frac{1}{3}$

$g(x)=3e^{u(x)}-x^2+4x$ et donc $g'(x)=3u'(x)e^{u(x)}-2x+4$.

Donc $g'(x)=e^{\frac{1}{3}x}-2x+4$

2-T a pour équation $y=g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)$.

ici: $x_0=3$, $g(3)=3e+3$. $g'(x_0)=e-2$

D'où l'équation: $y=\left(e-2\right)\left(x-3\right)+3e+3$.

3-Soit: $y=\left(e-2\right)x-\left(e-2\right)\times 3+3e+3$.

Soit: $y=\left(e-2\right)x+9$.

Donc la tangente t admet pour équation $y=\left(e-2\right)x+9$.

On a: $\left(e-2\right)x_M+9=\left(e-2\right)\left(-1\right)+9=-e+2+9=-e+11=y_M$.

Les coordonnées de M vérifient l'équation de t.

Donc la droite T passe par M.

Exercice 2

Soit h la fonction définie sur $\left[-4;4\right]$ par $h(x)=10^{-2}e^{x^2-9}-3x^2$.

1. Déterminez $h'(x)$.
2. Déterminez le signe de h'.
   Dresser le tableau de variation de h.

Corrigé

1. On pose $h(x)=10^{-2}e^{u(x)}-3x^2$, avec $u(x)=x^2-9$.

   Donc: $h'(x)=10^{-2}\times u'(x)\times e^{u(x)}-6x$ avec $u'(x)=2x-0=2x$.

   Et par là: $h'(x)=10^{-2}\times 2xe^{x^2-9}-6x$.

$$h'(x) = 2x\left(10^{-2} \times e^{x^2-9} - 3\right)$$

2. *h' est un produit.*

   Le premier facteur 2x est strictement négatif sur $[-4;0[$ *, est nul en 0, et strictement positif Sur* $]0;4]$ *.*

   Etudions le signe du second facteur.

   On résout: $10^{-2} \times e^{x^2-9} - 3 = 0 \ \ (1)$ *sur* $[-4;4]$ *.*

   $(1) \Leftrightarrow \sqrt{9+\ln 300} \approx 3,83$.

   D'où le tableau suivant:

x	-4		$-\sqrt{9+\ln 300}$		0		$\sqrt{9+\ln 300}$		4
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$0,01e^{x2-9}-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c	$\searrow$	b	$\nearrow$	a

   $a = h(-4) = h(4) = 10^{-2} \times e^{7} - 48 \approx -37,03$

   $b = h\left(-\sqrt{9+\ln 300}\right) = h\left(\sqrt{9+\ln 300}\right)$

   $= 10^{-2} \times e^{\sqrt{9+\ln 300}-9} - 3\times\left(9+\ln 300\right) \approx -41,11$

   $c = h(0) = 10^{-2} \times e^{0-9} - 3\times 0 \approx -1,2\times 10^{-6}$

   La symétrie s'explique par le fait que h est paire (son domaine de définition $D = [-4;4]$ *est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de D, on a* $h(-x) = h(x)$ *)*

Rappel

pour ce qui est de exponentielle, elle a été définie comme la limite de la somme des $\dfrac{x^n}{n!}$ *:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{ainsi,} \quad e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \approx 2,718....$$

ça s'appelle le développement en séries entières de l'exponentielle, mais c'est plutôt niveau BAC+2...

Quant au ln*, il est effectivement pratique pour les calculs de produits ou avec des exposants fractionnaires :* $\ln(x^r) = r\ln x$ *ou pour exemple de racine,* $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln x$

Exercice 3 *(Etude d'une fonction)*

Soit $f(x) = (x-1)e^x$ *pour* $x \in IR$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes du domaine de définition.

2. Etudiez les variations de f.

3. Construisez la courbe C représentant f.

Correction

Soit $f(x) = (x-1)e^x$ *pour* $x \in R$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes du domaine de définition.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. Etudiez les variations de f.

$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = xe^x$

$f'(x) \geq 0$ *sur* $[0;+\infty[$ *donc f est croissante sur* $[0;+\infty[$.

$f'(x) \leq 0$ *sur* $]-\infty;0]$ *donc f est décroissante sur* $]-\infty;0]$.

3. Construisez la courbe C représentant f.