



guessmaths

Série n° 7 exercices « Etude de fonction exponentielle » 2ème Bac SM

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $\left] \frac{1}{e}, 1 \right[$

2) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \left] \frac{1}{e}, 1 \right[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = e^{-u_n}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \in \left] \frac{1}{e}, 1 \right[$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| < e^{-\frac{1}{e}} |u_n - \alpha|$

c) Déduire $\lim u_n$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$

Montrer que : $v_n = e^{-\sum_{k=0}^{n-1} u_k}$ et en déduire $\lim v_n$

EXERCICE 2

On considère les fonctions ch et sh définies par : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : sh'(x) = ch(x)$ et $ch'(x) = sh(x)$ puis donner le tableau de variation des fonctions ch et sh

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

b) Montrer que : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) : ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$ et

$sh(a+b) = sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b)$ puis déduire $ch(2a)$ et $sh(2a)$ en fonction de $ch(a)$ et $sh(a)$

3) a) Montrer que la fonction sh admet une fonction réciproque sh^{-1}

b) Montrer que sh^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(sh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : sh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

4) Soit f la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]1, +\infty[$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que : $(\forall x \in]1, +\infty[) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

c) Montrer que : $(\forall x \in]1, +\infty[) : (f^{-1})(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

EXERCICE 3

soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^{\frac{x+1}{x}} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Étudier la continuité de f à droite en 0
- 2) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat trouvé
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis étudier la branche infinie de la courbe (C) en $+\infty$
- 4) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - \ln x$
Étudier les variations de g puis déduire le signe de $g(x)$
- 5) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} f(x)$ puis donner le tableau de variation de f .
- 6) construire la courbe (C)

EXERCICE 4

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} & ; x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que g est continue à droite en 0
- 2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$
 - a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq h''(x) \leq x$
 - b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq h(x) \leq \frac{x^3}{6}$
 - c) En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} & ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) \leq 0$
- 2) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) = 2g(2x) - g(x)$
b- En déduire que f est dérivable à droite en 0
- 3) Donner le tableau de variation de f
- 4) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 5

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-n x}$

(C_n) est la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

b) Étudier les branches infinies de la courbe (C_n)

2) Calculer $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f_n

3) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n dans $\mathbb{R}$

b) Montrer que : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x \geq x+1$, puis en déduire que $f_n(1) > 0$.

3) Montrer que : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

4) Construire la courbe (C_n) (on prend $\alpha_n \simeq 0,6$

5) a-Montrer que : $(\forall n \geq 2) : f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$

b- En déduire que : $(\forall n \geq 2) : f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

c-Montrer que la suite (α_n) est convergente

6) a-Montrer que $(\forall n \geq 2) : \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

b- déduire que : $(\forall n \geq 2) : \frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n}$

c- calculer $\lim \alpha_n$