I. Equations – Inéquations

1- _L'équation_ $x \in \mathbb{R}$; $\cos x = a$ _où a est un nombre réel_
_Si_ $a > 1$ _ou_ $a < -1$ _, alors l'équation n'admet pas de solution._
_Si_ $a = 1$ _, alors les solutions de l'équation sont les nombres_ $2k\pi$ _où_ $k \in \mathbb{Z}$.
_Si_ $a = -1$, _alors les solutions de l'équation sont les nombres_ $\pi + 2k\pi$ _où_ $k \in \mathbb{Z}$.
_Si_ $-1 < a < 1$ _et si_ α _est un nombre tel que_ $\cos \alpha = a$ _, alors l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des nombres_ $\alpha + 2k\pi$ _ou_ $-\alpha + 2k\pi$ _où_ $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1:

Résoudre l'équation (1) : $x \in \mathbb{R}$; $\cos x = \cos \frac{3\pi}{7}$

Comme $-1 < \cos \frac{3\pi}{7} < 1$ _; alors l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des nombres_ $\frac{3\pi}{7} + 2k\pi$ _ou les nombres_ $-\frac{3\pi}{7} + 2k\pi$ _avec_ $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2

Résoudre l'équation (2) : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On sait que: $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ _donc l'ensemble des solutions de l'équation_ (2) _est l'ensemble des nombres_ $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ _ou les nombres_ $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ _avec_ $k \in \mathbb{Z}$.

■ _Déterminons les solutions de l'équation_ (2) _appartenant à_ $[-4\pi ; 3\pi]$.

($x \in [-4\pi ; 3\pi]$) _équivaut à :_

$$\begin{cases} -4\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 3\pi & \text{et} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ -4\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 3\pi & \text{et} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Donc x est solution de l'équation (2) _équivaut à :_

$$\begin{cases} -4 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 3 & \text{et} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ -4 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 3 & \text{et} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

D'où x est solution de l'équation (2) _équivaut à :_

$$\begin{cases} \frac{-25}{12} \leq k \leq \frac{17}{12} & \text{et} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{-23}{12} \leq k \leq \frac{19}{12} & \text{et} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

Par suite _L'ensemble des solutions de l'équation_ (2) : ($x \in [-4\pi ; 3\pi]$) ; $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ _est :_

$\left\{-\frac{23\pi}{6};-\frac{13\pi}{6};-\frac{11\pi}{6};-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6};\frac{13\pi}{6}\right\}$

2- *L'équation* $x\in\mathbb{R}$ *;* $\sin x=b$ *où b est un nombre réel*

Si $b>1$ *ou* $b<-1$*, alors l'équation n'admet pas de solution.*

Si $b=1$ *, alors les solutions de l'équation sont les nombres* $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$.

Si $b=-1$*, alors les solutions de l'équation sont les nombres* $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$.

Si $-1<b<1$ *et si* β *est un nombre tel que* $\sin\beta=b$ *, alors l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des nombres* $\beta+2k\pi$ *ou* $\pi-\beta+2k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$.

Exemple 1:

Résoudre l'équation: $x\in\mathbb{R}$*;* $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *donc l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des nombres* $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ *ou* $\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$.

Exemple 2:

Résoudre l'équation: $x\in\mathbb{R}$*;* $\sin x=\cos\frac{\pi}{8}$.

On sait que $\cos\frac{\pi}{8}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ *; donc l'équation devient* $x\in\mathbb{R}$*;* $\sin x=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

par Suite: l'ensemble des solutions de l'équation proposée est l'ensemble des nombres $\frac{3\pi}{8}+2k\pi$ *ou* $\pi-\frac{3\pi}{8}+2k\pi=\frac{5\pi}{8}+2k\pi$.

3- *L'équation* $x\in\mathbb{R}$*;* $\tan x=c$ *ou c est un nombre réel ; Si* λ *est un nombre tel que* $\tan\lambda=c$*, alors l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des nombres* $\lambda+k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$.

Exemple 1:

Résoudre l'équation: $x\in\mathbb{R}$*;* $\tan x=-\sqrt{3}$

On sait que $\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$ *donc l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des nombres* $\frac{2\pi}{3}+k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$.

Exemple 2:

Résoudre l'équation : $x\in[-\pi;3\pi]$ *;* $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

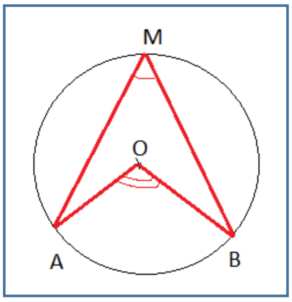
On sait que $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ *donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres* $\frac{\pi}{6}+k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$ *et qui sont dans l'intervalle* $[-\pi;3\pi]$.

Déterminons les entiers relatifs k tels que : $-\pi\le\frac{\pi}{6}+k\pi\le 3\pi$ *ce qui équivaut à :* $-\frac{7}{6}\le k\le\frac{17}{6}$

Donc $k\in\{-1;0;1;2\}$ *et par suite L'ensemble des solutions de l'équation :* $x\in[-\pi;3\pi]$ *;* $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ *est :*

$\left\{-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{13\pi}{6}\right\}$

4- Les angles inscrits

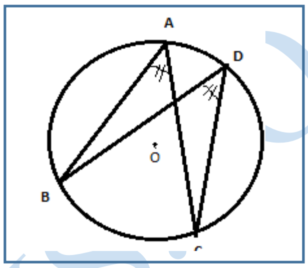


Définition

Un angle est appelé angle inscrit si son sommet appartient à un cercle et chacun des côtés recoupe ce cercle, ou si l'un des côtés recoupe le cercle et l'autre lui est tangent.

Propriété 1

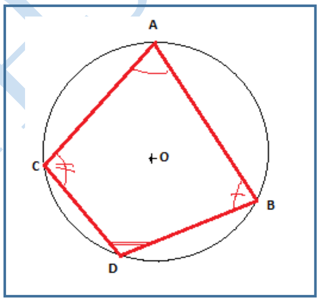
Si AOB est l'angle au centre associé à l'angle inscrit AMB alors AOB 2AMB



Propriété 2

Si, dans un cercle, deux angles inscrits interceptent le même arc, ils sont isométriques (égaux).

Propriété 3

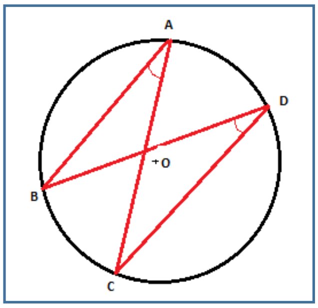


Dans un cercle, deux angles inscrits interceptent deux arcs ayant les mêmes extrémités et Si les sommets de ces deux angles ne sont pas sur le même arc, alors ils sont supplémentaires.

Propriété 4

A. B et C sont trois points distincts sur un cercle ().

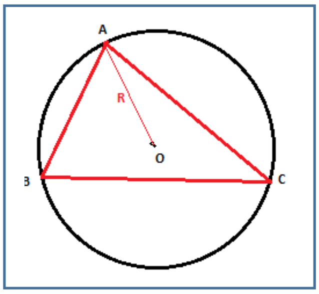
Le point D appartient au cercle (C) *si et seulement si :*



$CAB = CDB$ ou $CAB + CDB = 180$ *Dans le cas où les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle, on dit que ces points sont cocycliques et que le quadrilatère* $ABCD$ *est inscriptible.*

Propriété 5

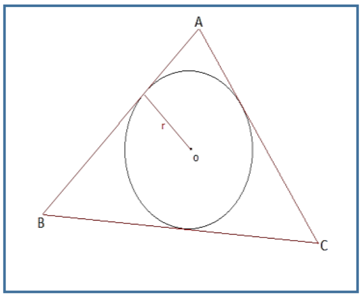
Si S *est l'aire d'un triangle* ABC *, alors* $S = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin C$.



Propriété 6

Si ABC *est un triangle et* R *est le rayon de son cercle circonscrit, alors :*

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R \ .$$



Propriété 7

Si ABC *est un triangle,* p *est son demi-périmètre ;* S *est son aire et* r *est le rayon de son cercle inscrit, alors:* $S = pr$.

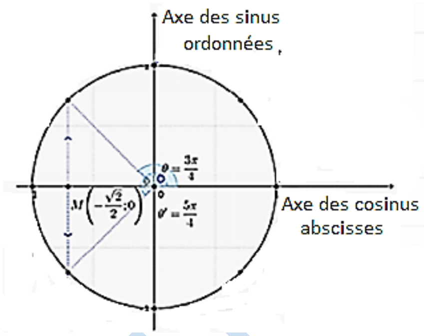
II. Résoudre algébriquement des équations, des inéquations Pour les exercices suivants, on utilisera le cercle trigonométrique

Exercices Corrigés de trigonométrie

Exercice 1

Résoudre dans l'intervalle $\left[0;2\pi\right]$ *l'équation* $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction

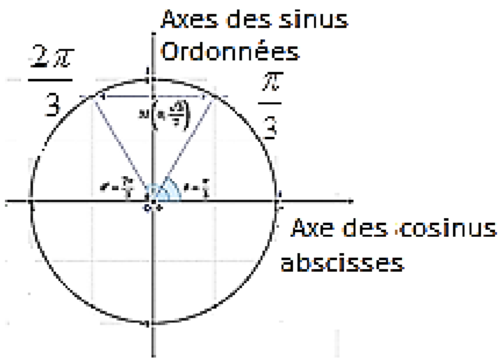


Les solutions sont $S=\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle $\left[0;2\pi\right]$ *l'équation* $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction

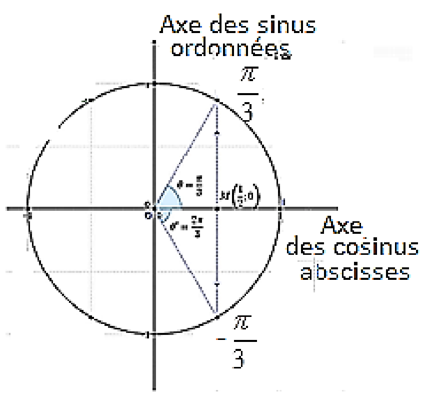


Les solutions sont $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$ *l'équation* $\cos x=\frac{1}{2}$

Correction

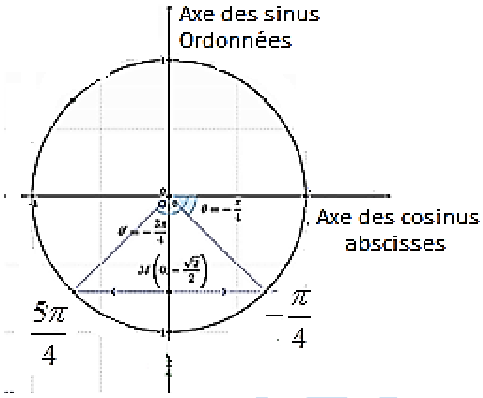


Les solutions sont $S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

Exercice 4

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ *l'équation* $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction

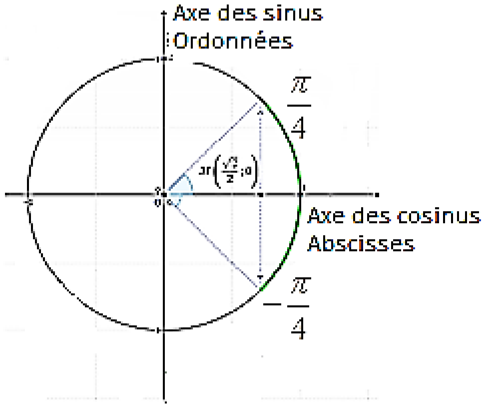


Les solutions sont $S = \left\{-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ *l'inéquation* $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Correction

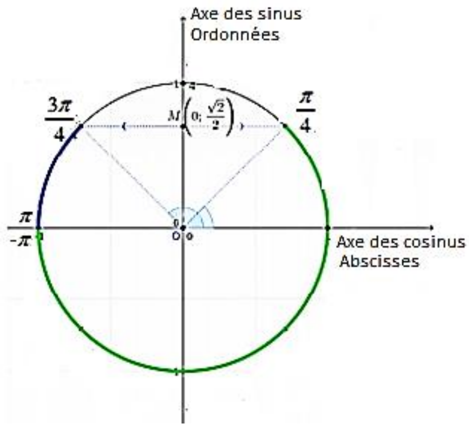


L'ensemble des solutions est $S = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

Exercice 6

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ *l'inéquation* $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction

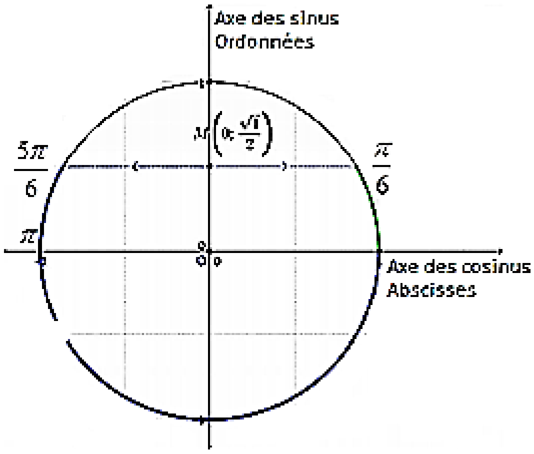


L'ensemble des solutions est $S = \left[-\pi;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

Exercice 7

Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ *l'inéquation* $\sin x < \frac{1}{2}$.

Correction

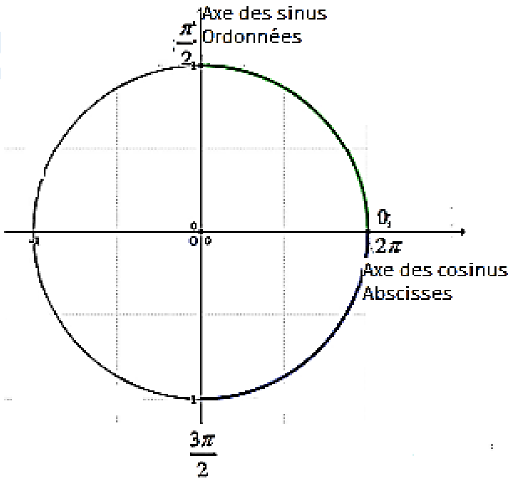


L'ensemble des solutions est $S = \left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$

Exercice 8

Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ *l'inéquation* $\cos x > 0$.

Correction :



L'ensemble des solutions est $S = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

■ $\cos x = \sin x$ ■ $\cos x = -\sin\dfrac{x}{2}$ ■ $\sin 2x = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

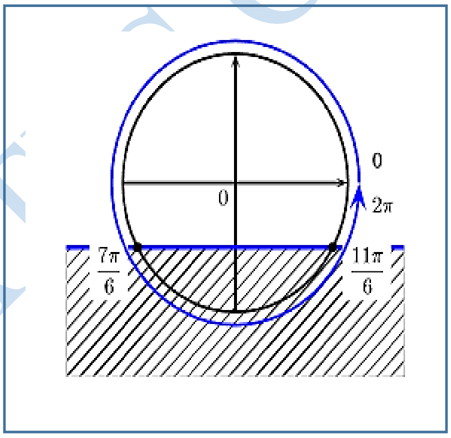
Résoudre dans $\mathbb{R}$ *puis dans* $[-\pi;\pi[$ *l'équation suivante :*

■ $\sin 2x = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Résoudre dans les équations suivantes :

■ $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ ■ $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$ ■ $\sin^2(x) = \cos^2(x)$

III. Inéquations trigonométriques



Exemple 1 :

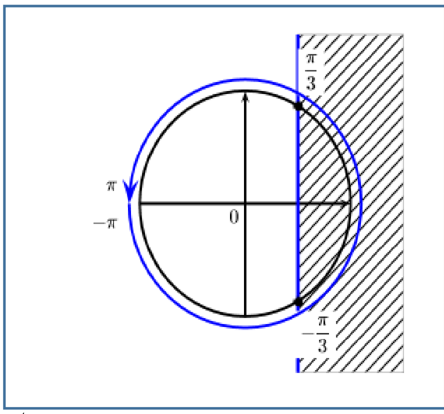
Résoudre, dans l'intervalle $[0;2\pi[$ *l'inéquation* $\sin x > -\dfrac{1}{2}$

On commence par chercher une valeur simple pour laquelle $\sin x > -\dfrac{1}{2}$,

ici on prendra $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

On trace un cercle trigonométrique pour retrouver les autres valeurs sur la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point correspondant à $-\dfrac{\pi}{6}$.

Attention on travaille sur l'intervalle $[0;2\pi[$, *les valeurs retenues seront donc* $\dfrac{7\pi}{6}$ *et* $\dfrac{11\pi}{6}$ *.Les valeurs pour lesquelles* $\sin x > -\dfrac{1}{2}$ *sont les valeurs situées au-dessus de la droite horizontales.* $S = \left[0;\dfrac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{11\pi}{6};2\pi\right]$



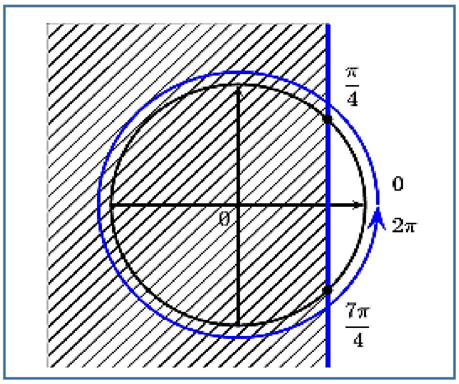
Exemple 2 :

Résoudre, dans l'intervalle $[-\pi;\pi[$ *l'inéquation* $\cos x < \dfrac{1}{2}$

On commence par chercher une valeur simple pour laquelle $\cos x = \dfrac{1}{2}$,

ici on prendra $x = \dfrac{\pi}{3}$. *On trace un cercle trigonométrique pour retrouver les autres valeurs sur la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point correspondant à* $\dfrac{\pi}{3}$ *. Attention on travaille sur l'intervalle* $[-\pi;\pi[$,

les valeurs retenues seront donc $-\dfrac{\pi}{3}$ *et* $\dfrac{\pi}{3}$.



Exemple 3 :

Résoudre, dans l'intervalle $[0;2\pi[$ *l'inéquation* $\cos x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On commence par chercher une valeur simple pour laquelle

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *ici on prendra* $x = \frac{\pi}{4}$.

On trace un cercle trigonométrique pour retrouver les autres valeurs sur la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point correspondant à $x = \frac{\pi}{4}$. *Attention on travaille sur l'intervalle* $[0;2\pi[$, *les valeurs retenues seront donc* $\frac{\pi}{4}$ *et* $\frac{7\pi}{4}$.

Les valeurs pour lesquelles $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ *sont les valeurs situées à droite de la droite verticale.*

$S = \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$.