Examen national 2017
Session normale 2éme Bac SM

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ *est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle* $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ *et que* $(\mathbb{C},+,\times)$ *est un corps commutatif.*

On pose : $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ *et pour tout* $(a;b)$ *de* $\mathbb{R}^2$ $M(a;b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

Et on considère l'ensemble $E=\left\{M(a;b)/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,50 pt 1) *Montrer que E est un sous-groupe du groupe* $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+\right)$.

0,50 pt 2) *On définit sur* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *la loi de composition interne* $\top$ *par :* $\left(\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4\right)$;

$M(a;b)\top M(c;d)=M(a;b)\times A\times M(c;d)$

Vérifier que E est une partie stable de $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\top\right)$

3) *On considère l'application* φ *de* $\mathbb{C}^*$ *dans E reliant chaque nombre complexe non nul* $a+ib$ (*où* $(a;b)\in\mathbb{R}^2$) *à la matrice* $M(a;b)$ *de E.*

0,75 pt a) *Montrer que* φ *est un homomorphisme de* $(\mathbb{C}^*,\times)$ *dans* $(E,\top)$ *et que :* $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ *où* $E^*=E-\{M(0;0)\}$.

0,75 pt b) *En déduire que* $(E^*,\top)$ *est un groupe commutatif d'élément neutre J à déterminer.*

0,50 pt 4) a) *Montrer que la loi de composition interne* $\top$ *est distributive par rapport à la loi de composition interne + dans E.*

0,50 pt b) *En déduire que* $(E\,;+;\top)$ *est un corps commutatif.*

Exercice 2 : (3,5 points)

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I : On considère dans l'ensemble C l'équation d'inconnue z suivante :

$(E): 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

0,50 pt 1) *Vérifier que le discriminant de l'équation* (E) *est :* $\Delta=(2im)^2$.

0,50 pt 2) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E).

Partie II : Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$.

On suppose que $m\in\mathbb{C}-\{0;1;i\}$ *et on pose :* $z_1=\frac{1+i}{2}(m+1)$ *et* $z_2=\frac{1-i}{2}(m+i)$.

On considère les points A, B, M, M_1 *et* M_2 *d'affixes respectives* 1, i , m , z_1 *et* z_2.

0,25 pt 1) a) *Vérifier que :* $z_1=iz_2+1$.

0,50 pt b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$, et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,50 pt 2) a) Vérifier que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i\frac{m-1}{m-i}$.

0,50 pt b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés alors M appartient au cercle Γ de diamètre $[AB]$.

0,75 pt c) Déterminer l'ensemble des points M pour que les points, M ; M_1 et M_2 soient cocycliques. (Remarquer que : $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)

<u>Exercice 3 :</u> (3 points)

On admet que 2017 est un nombre premier, et que : $2016 = 2^5 3^2 7$

Et soit p un nombre premier supérieur ou égale à 5.

1) Soit $(x;y)$ un couple de $IN^* \times IN^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$

0,25 pt a) Vérifier que : $p < 2017$.

0,50 pt b) Montrer que : p ne divise pas y.

0,75 pt c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis en déduire que p divise 2016.

0,50 pt d) Montrer que : $p = 7$.

1,00 pt 2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ de $IN^* \times IN^*$ vérifiant :

$$px + y^{p-1} = 2017$$

<u>Problème</u> : (10 points)

<u>Partie I</u> : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

Et soit (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

0,25 pt 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

0,50 pt b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

0,50 pt c) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,50 pt 2) a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pt b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

0,75 pt 3) a) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I à déterminer.

0,50 pt b) Tracer la courbe (C). (On prend $f(1) \simeq 0;7$ et $4e^{-3} \simeq 0;2$)

<u>Partie II</u> : On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$

0,25 pt 1) Montrer que F est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

0,50 pt 2) a) En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$;

$$\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}\,dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\,dt$$

0,25 pt b) Déterminer : $\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}\,dt$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

0,50 pt c) Montrer que : $\int_0^1 f(t)\,dt=e^{-1}$.

0,50 pt 3) Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations : $x=0$, $x=2$ et $y=0$.

4) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $(\forall n\in IN)$; $u_n=F(n)-F(n+2)$

0,50 pt a) En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que pour tout entier naturel n, il existe un nombre réel v_n de l'intervalle $\left]n;n+2\right[$ tel que : $u_n=2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$

0,25 pt b) Montrer que : $(\forall n\in IN^*)$; $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\leq u_n\leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

0,25 pt c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

<u>Partie III</u> :

0,50 pt 1) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique nombre réel strictement positif a_n tel que : $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$.

0,25 pt b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

0,25 pt c) Vérifier que : $(\forall n\in IN^*)$; $-\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}$.

0,25 pt 2) a) Montrer que : $(\forall t\in[0;+\infty[)$; $1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$.

0,25 pt b) Montrer que : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $-\frac{x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 4.

0,50 pt a) Vérifier que : $a_4\geq 1$ puis en déduire que $a_n\geq 1$ (On admet que : $e^{\frac{3}{4}}\geq 2$)

0,50 pt b) Montrer que : $1-\frac{2}{3a_n}\leq\frac{2a_n^{\ 2}}{n}\leq 1$

(Vous pouvez utiliser les questions 1-c) et 2-b) de la partie III)

0,50 pt c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}}\leq a_n$

(Vous pouvez utiliser les questions 3-a) et 3-b)) ; puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

0,50 pt d) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$