

Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. a) Calculer u_1 et u_2

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{1}{2}$

c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} - u_n \right)$

d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = u_n - \frac{1}{2}$

a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique en précisant sa raison.

b) Calculer son premier terme v_0

c) Calculer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1}{2} \left(11 \left(\frac{1}{5} \right)^n + 1 \right)$

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ Montrer que $S_n = \frac{55}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) + \frac{n}{2}$, puis calculer la limite de S_n

Exercice 2 (National 2021)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Calculer u_0

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

5. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{1+u_{n+1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$

b) En déduire u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1. Étudier les variations de f sur $[1;2]$; puis montrer que $f([1;2]) \subset [1;2]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$

b) Calculer u_1 ; puis montrer que (u_n) est croissante

c) En déduire que (u_n) est convergente ; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$, puis interpréter géométriquement le résultat.

3. Étudier la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$

4. a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{(2x + \sqrt{x} + 1)(x - 1)}{2x\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$, puis donner le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

5. On considère la suite (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que pour tout entier naturel n : $a_n > 1$

b) Montrer que la suite (a_n) est une suite décroissante

c) En déduire que (a_n) est une suite convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Exercice 5

Partie A

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Montrer que $D_f =]-\infty; 4[$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$.

3. Étudier les branches infinies de (C_f) .

4. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty; 4[$ et que : $f'(x) = \frac{8-x}{2(\sqrt{4-x})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

5. a) Vérifier que pour tout $x < 4$: $f(x) - x = \frac{x(x-3)}{\sqrt{4-x}(1+\sqrt{4-x})}$

b) En déduire que : $\forall x \in [0; 3] ; f(x) \leq x$

6. Tracer la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 3$

2. Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3. Montrer que (u_n) est une suite convergente ; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{-5u_n - 9}{1 + u_n} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n < 3$

2. a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} - u_n = \frac{(3 + u_n)^2}{1 + u_n}$

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

c) Montrer que (u_n) est une suite convergente

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$

b) Écrire v_n en fonction de n .

c) En déduire que $u_n = -\frac{2 + 3n}{n} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) ;$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. On pose $S_n = \frac{1}{u_0 + 3} + \frac{1}{u_1 + 3} + \frac{1}{u_2 + 3} + \dots + \frac{1}{u_n + 3}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

a) Écrire S_n en fonction de n .

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$