

Exercice 1: (3,5 Pts)

I) Considérons la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) calculer la limite de la suite (v_n)

II) Considérons la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que : $1 \leq u_n \leq 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que (u_n) est croissante.

3) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$.

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$, et Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2: (4,5 Pts)

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$.

1) Montrer que : $z = 6$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) a- Déterminer les nombres réels a et b tel que $P(z) = (z - 6)(z^2 + az + b)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

b- En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; On considère les points A

et B et C et A' et E d'affixes respectives; $a = 6$; $b = 3 + i\sqrt{3}$; $c = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $a' = 1 + i$ et $e = 2i\sqrt{3}$.

a- Montrer que : $\frac{b}{a'} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 3}{2}$

b- Montrer que : $\frac{b}{a'} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire la valeur de $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

c- Ecrire $\left(\frac{b}{a'}\right)^3$ sous la forme algébrique.

4) a- Calculer $\frac{a-b}{a-c}$ et en déduire la mesure d'angle $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA})$

b- En déduire la nature de triangle ABC .

5) Soit z l'afixe d'un point M et z' l'afixe d'un point M' l'image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a-Monter que: $z' = iz + 3 - \sqrt{3} - i(3 + \sqrt{3})$

b- Déterminer l'image de point E par la rotation R

6) Monter les points A et B et E sont alignés.

Exercice 3 : (9 Pts)

I) Soit u la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$

1) Montrer que : $u'(x) = e^x - 3$ pour tout x de $]0; +\infty[$; puis dresser le tableau de variation de u.

2) a- Montrer que: $u(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b- En déduire que : $e^x - e > 3x - 4$ pour tout de $]0; +\infty[$.

II) Soit v la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$

1) a- Vérifier que : $-9x^2 - x - 1 < 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

b- Vérifier que : $-9x^3 + 8x^2 + 1 = (x-1)(-9x^2 - x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

2) a- Calculer $v'(x)$ puis dresser le tableau de variation de v et en déduire que $v(x) \leq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b- En déduire que : $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$ pour tout x de $]0; +\infty[$

3) Montrer que : $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$

III) Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis donner l'interprétation géométrique.

3) a- Calculer la dérivée de la fonction f et en déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b- Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$ tel que : $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$

5) Tracer (C) la courbe de f dans une repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.(unité 1 cm)

6) a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b- Dresser le tableau de variation f^{-1} sur l'intervalle J

c- Calculer $f(1)$ puis montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et déterminer $(f^{-1})'(0)$

Exercice 4 : (3 Pts)

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = x \ln(x+1)$ et l'intégrale $I = \int_0^1 x \ln(x+1) dx$

a- Vérifier que $0 \leq x \ln(x+1) \leq \ln 2$ pour tout x de $[0;1]$

b- En déduire $0 \leq I \leq \ln 2$

2) a- Montrer que : $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b- En déduire $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2}$

c- En utilisant une intégration par partie, calculer $\int_0^1 2x \ln(x^2+1) dx$