

Exercice 1

Partie I

Considérons la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \text{Arctan} \sqrt{\frac{x+1}{x}} & ; \text{si } x < 0 \\ 2\text{Arctan} \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right) & ; \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

- 1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$.
- 2) Montrer que f est continue sur D_f .
- 3) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en -1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 4) Etudier les variations de f ; puis dresser son tableau de variations
- 5) Calculer les limites de f aux bornes de D ; et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 6) Considérons h la restriction de la fonction f à $]-\infty; -1]$
 - a- Montrer que la fonction h réalise une bijection de $]-\infty; -1]$ vers un intervalle K à déterminer.
 - b- Montrer que h^{-1} la fonction réciproque de h est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et calculer $(h^{-1})' \left(\frac{\pi}{6} \right)$
(Sans chercher à expliciter $(h^{-1})(x)$)
 - c- Déterminer $(h^{-1})(x)$ pour tout $x \in K$.
7. Tracer (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

Partie II

Considérons g la restriction de la fonction f à $[1; +\infty[$.

Considérons la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = g(w_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq w_n \leq 2$.
- 2) Montrer que : $(\exists ! \alpha \in]1; 2[) / g(\alpha) = \alpha$.
- 3) a- Montrer que : $(\forall x \in [1; 2]) ; |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$
b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |w_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |w_n - \alpha|$; puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \alpha$.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I centré en 0 tels que :
 $f(0) = g(0) = 0$ et la fonction g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{0\}$.

1) Montrer que : $(\forall x \in I \setminus \{0\}) g(x) \neq 0$.

2) Montrer que : $(\forall x \in I \setminus \{0\}) ; (\exists c \in]0; x[\text{ ou } \exists c \in]x; 0[) \setminus \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

3) Application :

Calculer les deux limites suivantes : $\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan} x - x}{x^2}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \text{Arctan} \sqrt{x+2}$

1) a) Etudier les variations de f sur $]-2; +\infty[$

b) Montrer que : $(\forall x \in [1; 2]) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{8\sqrt{3}}$

c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \text{Arctan}(x) \leq x$

d) Dédurre que : $(\exists ! \alpha \in [1; 2]) / f(\alpha) = \alpha$.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha \leq u_n \leq 2$

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$

d) Dédurre que (u_n) est convergente et calculer sa limite.