

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = x^3 + (n+1)x - 1$ et la fonction ϕ définie sur $]0; 1[$ par : $\phi(x) = \frac{1}{x} - x^2$

Partie 1

- 1) a) Montrer que ϕ réalise une bijection de $]0; 1[$ vers $]0; +\infty[$.
- b) Montrer que l'équation $\phi(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; 1[$.
- c) Montrer que : $((x; y) \in]0; 1[^2) ; |\phi(x) - \phi(y)| \geq 2|x - y|$
- 2) on considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in]0; +\infty[\\ u_{n+1} = \phi^{-1}(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$
 - a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$,
 - b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
 - c) Dédire que (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Partie 2

- 1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}$ et que : $\alpha_n \in]0; 1[$
- 2) a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puis déduire qu'elle est convergente.
- b) Vérifier que : $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n < 1$
- 3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < \alpha_n < \frac{1}{n+1}$ puis calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (n\alpha_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n}\alpha_n)$
- b) Montrer que : $\phi(\alpha_n) = n+1$ puis retrouver encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

Partie 3

- 1) Montrer que : $(\forall (p; q) \in \mathbb{N}^2) ; \alpha_p - \alpha_q = \frac{q\alpha_q - p\alpha_p}{\alpha_p^2 + \alpha_p\alpha_q + \alpha_p^2 + 1}$
- 2) Montrer que : $(\forall (p; q) \in \mathbb{N}^2) ; (p < q) \Rightarrow (0 \leq \alpha_p - \alpha_q \leq q\alpha_q - p\alpha_p)$
- 3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq \alpha_n - \alpha_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

On o pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} \right)$

montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n \geq \alpha_n - \alpha_{n+1}$

Problème 2

Partie 1

Soit la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{\tan^2 x}$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0.

c) calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $[0; +\infty[$ (on ne demande pas de calculer $f^{-1}(x)$).

b) calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ puis tracer (C) et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

c) prouver que $f^{-1}(2) > \frac{\pi}{4}$ puis déduire que $f^{-1}(2) > 1$

3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$

b) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0.

c) calculer : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1} \right)$

Partie 2

1) a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$; puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$f^{-1}(n) + f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall k \in \{1; 2; \dots; n\}) ; f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+k) \leq f^{-1}(2n)$

2) on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq u_n \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

b) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Partie 3

Soit h la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par : $h(x) = f^{-1}(x+1)$

1) Montrer que : $(\forall x \in [-1; +\infty[) ; 0 \leq h(x) \leq \frac{5}{3}$

2) a) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique α dans $[-1; +\infty[$.

b) prouver que: $0 \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$.

3) on pose:
$$\begin{cases} v_0 = \frac{4}{3} \\ v_{n+1} = h(v_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}$

b) Montrer que : $\left(\forall x \in \left] 1; \frac{5}{3} \right[\right) ; |h'(x)| \leq \frac{4}{5}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5} |v_n - \alpha|$; puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.