

1. Proportions - fonction propositionnelle

Définition

Tout énoncé mathématique qui a un sens qui est soit vraie ; soit faux est une proposition.
On note souvent une proposition par la lettre P ; Q ; R.

Exemple

P : " $2 + 3 = 5$ " est une proposition vraie

Q : " $-2^2 = 4$ " est une proposition fausse.

R : " $\sqrt{\frac{1}{4}} \geq \frac{1}{4}$ " est une proposition vraie

2) Fonction propositionnelle

Définition

On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique contenant une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble E et qui devient une proposition à chaque fois qu'on remplace la variable (ou les variables) par un élément (ou des éléments de E)

On note souvent une fonction propositionnelle par : $A(x)$; $B(x)$; $B(x,y)$; $B(x,y,z)$

Exemple 1) $A(x) : x \in \mathbb{R} ; x^2 - 1 = 0$

$A(1)$ est vraie car $1^2 - 1 = 0$.

$A(2)$ est fausse car $2^2 - 1 = 3 \neq 0$.

2) $B(x,y) : x + y \geq 0$ où $x \geq 0$ et $y \leq 0$

$B(1;-2)$ est fausse car $1 + (-2) = -1 \leq 0$

$B(4;-1)$ est vraie car $4 + (-1) = 3 \geq 0$

II- Les quantificateurs

1) Quantificateur universel.

Soit $A(x)$ une fonction propositionnelle définie sur un ensemble E

Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit » et est appelé quantificateur universel.

Si pour tout $x \in E$ on a $A(x)$ est vraie ; on écrit $(\forall x \in E; A(x))$

Exemples:

" $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$ " est une proposition vraie.

" $\forall x \in \mathbb{N}; \sqrt{x} \in \mathbb{N}$ " est une proposition fausse.

2) Quantificateur existentiel.

Le symbole $\exists$ se lit "il existe au moins" ou tout simplement "il existe".
S'il existe un élément $x \in E$ tel que $A(x)$ est vraie, s'écrit : $\exists x \in E; A(x)$

Exemples

" $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - x = 0$ " est vraie car $0^2 - 0 = 0$ et $1^2 - 1 = 0$

" $\exists x \in \mathbb{R} / x \geq x^2$ " est vraie car pour $x = \frac{1}{10}$ on a : $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10} \geq \frac{1}{100}$

le symbole $\exists!$ se lit "il existe un unique" ou "il existe un seul"

Exemple

" $(\exists! x \in \mathbb{R}) / x^2 - 2x + 1 = 0$ " est vraie car : $x^2 - 2x + 1 = 0$ est équivalent à $(x-1)^2 = 0$
est équivalent à $x - 1 = 0$
donc $x = 1$

On conclut que l'équation a une unique solution $x = 1$.

III- Operations sur les propositions

1. Négation d'une proposition

Définition

la négation de la proposition P est la proposition notée $\bar{P}$ ou $\neg P$.
si P est vraie alors $\bar{P}$ est fausse et si P est fausse alors $\bar{P}$ est vraie.

Table de vérité

P	$\bar{P}$
V ou 1	F ou 0
F ou 0	V ou 1

Exemples

P : " $\sqrt{2} + 1 \neq 0$ "

$\bar{P}$: " $\sqrt{2} + 1 = 0$ "

P : " $2 < 3$ "

$\bar{P}$: " $2 \geq 3$ "

P : " $(\exists x \in E) / x^2 + x \geq 0$ "

$\bar{P}$: " $(\forall x \in E) / x^2 + x < 0$ "

P : " $(\forall x \in E) / x + 1 = 0$ "

$\bar{P}$: " $(\exists x \in E) / x + 1 \neq 0$ "

P : " $(\exists x \in E) / x^2 = 3$ "

$\bar{P}$: " $(\forall x \in E) / x^2 \neq 3$ "

2) Conjonction de deux propositions.

La Conjonction de deux propositions P et Q notée " P et Q " ou " $P \wedge Q$ " est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies.

Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple

Soient $P: "2 \in \mathbb{N}"$ et $Q: "\sqrt{2} \in \mathbb{N}"$ alors $P \wedge Q$ est fausse car $P: "2 \in \mathbb{N}"$ est vraie par contre $Q: "\sqrt{2} \in \mathbb{N}"$ est fausse.

3) Disjonction de deux proposition

Définition

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition " P ou Q " ou " $P \vee Q$ " qui est vraie si au moins une des deux propositions est vraie

Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4) L'implication de deux propositions

Définition:

Soient P et Q deux propositions. L'implication de Q par P notée $P \Rightarrow Q$ se lit P implique Q est vraie si P et Q sont vraies ou si P est fausse.

Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exercice

A l'aide d'une table de vérité montrer que les propositions $P \Rightarrow Q$ et " $\bar{P}$ ou Q " ont la même valeur de vérité.

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \text{ ou } Q$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

5) Equivalence de deux propositions

Définition

Soient P et Q deux propositions l'équivalence de P et Q notée par $P \Leftrightarrow Q$ est la proposition qui est vraie si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

$P \Leftrightarrow Q$ se lit " P équivaut à Q ".

Remarque :

$(P \Leftrightarrow Q)$ est la proposition $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)]$

valeur de vérité.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

6) Lois de Morgan

P ; Q et R trois propositions.

- $\overline{P \text{ et } Q} \Leftrightarrow \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$
- $\overline{P \text{ ou } Q} \Leftrightarrow \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$

Exercices d'application

Donner la négation des propositions suivantes et déterminer leur valeur de vérité :

- P : " $(\exists x \in \mathbb{N}) / x+1=0$ "
- Q : " $(\exists x \in \mathbb{R}) / x(x-2) \leq 0$ "
- R : " $(\forall x \in \mathbb{R}) / x^2 + 2x + 1 \geq 0$ "
- S : " $(\forall x \in \mathbb{R}) / x^2 + x \geq 0$ "
- T : " $(\forall x \in \mathbb{N}) / \sqrt{x} \in \mathbb{N}$ "
- U : " $(\forall x \in \mathbb{R}) / x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0$ "
- V : " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) / x \leq y$ "