Exercices 10 sur Les complexes   2éme Bac SM

Exercice 1

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)z-8i$.

1°) a) Vérifier que $z=2i$ *est une solution de l'équation* $P(z)=0$.

b) Montrer que pour tout nombre complexe z , $P(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

2°) a) Déterminer les deux autres solutions z_2 *et* z_3 *de l'équation* $P(z)=0$ *;* z_2 *étant la solution dont la partie imaginaire est positive*

b) Ecrire les solutions z_1 *;* z_2 *et* z_3 *sous forme exponentielle*

3°) Placer dans le plan complexe et avec précision les points A, B et C d'affixes respectives z_1 *;* z_2 *et* z_3 *; puis démontrer qu'ils sont sur un même cercle (càd : Cocycliques)*

4°) Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?

Exercice 2

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. (C) *le cercle de centre le point I d'affixe* 1 *et passant par le point B d'affixe* 2 .

Soit (E) *l'équation :* $z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$ *où* θ *est un réel de l'intervalle* $]0;\pi[$.

1) a) Sans résoudre l'équation (E) *; Montrer que si z est une solution de* (E) *alors :* $|z-1|=1$.

b) En déduire que pour tout réel θ *, les images des solutions de l'équation* (E) *appartiennent au cercle* (C)

2) a) Résoudre l'équation (E)*.On notera* z_1 *et* z_2 *les solutions telles que* $\operatorname{Im}(z_1)>0$

On considère, dans la suite, les points M et N d'affixes respectives z_1 *et* z_2.

b) Montrer que : $[MN]$ *est un diamètre du cercle* (C).

c) Donner la forme exponentielle de z_1 *et vérifier que :* $z_2=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$

d) Montrer que le quadrilatère OMBN est un rectangle.

e) Déterminer en fonction de θ *l'aire du rectangle OMBN.*