Exercice 1 (2,5 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n - 1}{U_n} \end{cases} \quad (\forall n \in IN) \quad et \quad v_n = \frac{1}{U_n - 1} \quad (\forall n \in IN)$$

1 . Montrer par récurrence que : $U_n > 1$ pour tout n dans IN.

2. a) Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison 1 .

b) Déduire que $V_n = n+1 \quad (\forall n \in IN)$.

3. Montrer que : $U_n = \dfrac{n+2}{n+1};(\forall n \in IN)$.

4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(U_n)$.

Exercice 2 (5 pts)

Résoudre dans IR les équations et les inéquations suivantes :

1) $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0$

2) $e^{2x} - 3e^x = 0$

3) $(\ln x - 2)\ln x \langle 0$

4) $(2e^x - 1)(e^x - 2) \geq 0$

Problème : (12,5 pts)

Partie II :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x + 1 - 2\ln x$$

1. Montrer que : $g'(x) = \dfrac{x-2}{x} \quad (\forall x \in]0;+\infty[)$, puis étudier les variations de g .

2. Déduire que : $g(x) > 0 \; (\forall x \in]0;+\infty[)$.

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x - (\ln x)^2$

et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$

1. a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat .

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

(on utilisera le changement de variable $t = \sqrt{x}$)

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(on écrira $f(x)$ sous la forme $f(x)=x\left(1+\frac{\ln x}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$)

2 . Montrer que (C) admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

3 . a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$.

b) Déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

4 . a) Vérifier que : $f(x)-x=(1-\ln x)\ln x$

En déduire que (C) et (D) se coupent en deux points , dont on déterminera les coordonnées .

b) Montrer que $f(x)-x\geq 0$ pour tout x de $[1;e]$

5 . Montrer qu'il existe un réel unique α dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right[$ tel que : $f(\alpha)=0$.

6. Construire (C) prendre $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\ cm$.(on admet que (C)admet un seul point d'inflexion d'abscisse $e^{3/2}$).

7. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à définir.

8. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et que : $\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{\alpha}{g(\alpha)}$

Partie III :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0=\sqrt{e} \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

1. Montrer que : $1\leq U_n\leq e \quad (\forall n\in IN)$
2. Montrer que (U_n) est croissante et déduire qu'elle est convergente.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.