Examen national du baccalauréat session normale 2018

Exercice 1 (3pts)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ *les points* $A(0,-2,-2)$; $B(1,-2,-4)$ *et* $C(-3,-1,2)$.

1. *Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ *; Puis déduire que :* $2x+2y+z+6=0$ *est l'équation cartésienne du plan (ABC).*
2. *Soit la sphère* (S) *d'équation :* $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$
   Vérifier que le point $\Omega(1,0,1)$ *est le centre de la sphère* (S) *et R=5 est son rayon.*
3. *a) Vérifier que :*
   $$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in \mathrm{IR})$$ *est une représentation paramétrique de la droite* (Δ) .
   (Δ) *est une droite qui passe par* $\Omega(1,0,1)$ *et qui est perpendiculaire au plan (ABC).*
   b) déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) *et du plan (ABC).*
4. *Vérifier que* $d(\Omega;(ABC))=3$*; puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle de rayon 4 et de centre à déterminer .*

Exercice 2 (3pts)

1. *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation:* $2z^2+2z+5=0$
2. *Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ *;on considère la rotation R de centre O et d'angle* $\dfrac{2\pi}{3}$.
   a) Ecrire sous forme trigonométrique : $d=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) *Soit A le point du plan d'affixe* $a=-\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}$ *et B son image par la rotation R .*

Montrer que l'affixe du point B est $b=d.a$

3. *Soit t la translation de vecteur* $\overrightarrow{OA}$ *et C l'image du point B par la translation t ; et c l'affixe de C.*

   a) *Vérifier que :* $c=b+a$

   Puis déduire que : $c=a.\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   (on peut utiliser le résultat de la question 2-b)).

   b) *Déterminer un argument de* $\left(\frac{c}{a}\right)$ *;puis déduire que le triangle OAC est équilatéral.*

Exercice 3 (3pts)

Une caisse contient 9 boules (indiscernables au toucher)

- *5 boules Rouges portants les numéros : 2;2;2;1;1.*
- *4 boules Blanches portants les numéros : 2;2;2;1.*

On tire au hasard, simultanément trois boules de la caisse .

Soit les événements

A « les boules tirées sont de même couleur »

B « les boules tirées portent le même numéros»

C « les boules tirées sont de même couleur et portent le même numéros »

1. *Montrer que :* $P(A)=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{1}{4}$ *et* $P(C)=\frac{1}{42}$
2. *On répète l'expérience précédente 3 fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans la caisse .*

   Soit X la variable aléatoire liée au nombre de fois où l'événement A est réalisé.

   a) *Déterminer les paramètres de la variable X.*

   b) *Montrer que :* $P(X=1)=\frac{25}{72}$ *et calculer* $P(X=2)$

Probléme (11 pts)

I- *Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle IR par :*

$g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

Et son tableau de variation ci-dessous :

X	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1. *Vérifier que g(0)=0*
2. *Déterminer le signe de g(x) sur chacun des intervalle* $]-\infty;0]$ *et* $[0;+\infty[$.

II- *Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle IR par :*

$f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$ *, Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé* $(o,\vec{i},\vec{j})$ *(unité : 1cm).*

1- a) *Vérifier que :* $(\forall x \in IR) \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$

Puis montrer que : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

b) *Calculer :* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (f(x) - x)$ *; puis déduire que (C) admet la droite (D) d'équation* $y = x$ *comme asymptote oblique au voisinage de* $+\infty$.

c) *Vérifier que :* $(\forall x \in IR) \quad f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ *;puis calculer* $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$

d) *Montrer que :* $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ *;puis interpréter géométriquement le résultat.*

2- a)*Vérifier que* $f(x) - x$ *et* $(x^2 - x)$ *ont le même signe sur IR.*

b) *Déduire que (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle* $(]-\infty;0] \cup [1;+\infty[)$ *et au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle* $[0;1]$.

3- a) *Montrer que pour tout x dans IR ;on a :* $f'(x) = g(x).e^{-x}$

b) *Déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle* $]-\infty;0]$ *et croissante sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

c) *Dresser le tableau de variation de f sur IR.*

4- a) *Vérifier que pour tout x dans IR :* $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$

b) *Déduire que (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses respectifs 1 et 4 .*

5- Construire (C) et (D) dans le même repére $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

(on peut prendre $f(4)\simeq 4,2$)

6- a) Montrer que la fonction $H: x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur IR .

Puis déduire que : $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e-5}{e}$

b) En utilisant une intégration par partie montrer que : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$

c) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C)

; la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

III – On considère la suite numérique $\left(U_n\right)$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

b) Montrer par récurrence que : $0 \le U_n \le 1$ pour tout entier naturel n.

(On peut utiliser le résultat de la question II-3-b))

2. Montrer que la suite $\left(U_n\right)$ est décroissante

3. En déduire que la suite $\left(U_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.