guessmaths

Correction de l'examen National

Session Normale 2017

Exercice1

1) Montrons que E est un sous-groupe du groupe $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$

- $E \neq \varnothing$, car $M(0,0)=O \in E$
- $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Soient $M(a;b)$ et $M(c;d)$ deux éléments de E.

On a : $$M(a;b)-M(c;d)=\begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a-c & b-d & -b+d \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -a+c & a-c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a-c) & (b-d) & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ (b-d) & -(a-c) & (a-c) \end{pmatrix}$$

$$=M(a-c;b-d)$$

Comme $((a-c);(b-d)) \in \mathbb{R}^2$ alors $M(a-c;b-d) \in E$.

Par suite $(E;+)$ est un sous-groupe du groupe $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+\right)$

2) Montrons que E est une partie stable de $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\mathrm{T}\right)$

✓ On a : $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

✓ Soit $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$.($M(a;b)$ et $M(c;d)$ appartiennent à E).

On a : $M(a;b)\mathrm{T}M(c;d) = M(a;b)\times A \times M(c;d)$

$$=\begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

donc : $$M(a;b)\mathrm{T}M(c;d)=\begin{pmatrix} (ac-bd) & (ad+bc) & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ (ad+bc) & -(ac-bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

$$=M(ac-bd;ad+bc)$$

Comme $(ac-bd;ad+bc) \in \mathbb{R}^2$ alors : $(M(a;b)\mathrm{T}M(c;d)) \in E$

Par suite E est une partie stable de $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\mathrm{T}\right)$.

3) a) ✓ Montrons que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(E;T)$.

Soient $(a+ib)$ et $(c+id)$ de $\mathbb{C}^*$ / $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(c;d)\in\mathbb{R}^2$

On a : $\varphi\big((a+ib)\times(c+id)\big)=\varphi\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big)$

$$=M(ac-bd;ad+bc)$$
$$=M(a;b)TM(c;d)$$
$$=\varphi(a+ib)T\varphi(c+id)$$

Donc φ et un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(E;T)$.

✓ Montrons que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

Rappel :
On rappelle que si φ est une application de E vers F et A une partie de E ; alors :
$\varphi(A)=\{\varphi(x)\,/\,x\in A\}$

On a : $\varphi(\mathbb{C}^*)=\{\varphi(z)\,/\,z\in\mathbb{C}^*\}$

$$=\{\varphi(a+ib)\,/\,(a;b)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}\}$$
$$=\{M(a;b)\,/\,(a;b)\in\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}\} .$$
$$=E^*-\{M(0,0)\}$$

Donc $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

b) •) On sait que $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe Commutatif ($(\mathbb{C}^*;+;\times)$ est un corps commutatif) et

φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(E^*;T)$

Donc : $(\varphi(\mathbb{C}^*);T)$ est un groupe Commutatif.

Comme $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$; alors $(E^*;T)$ est un groupe commutatif.

• On sait que 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*;\times)$

Donc $J=\varphi(1)$ est l'élément neutre de $(E^*;T)$

$J=\varphi(1)=\varphi(1+0\times i)=M(1;0)$

D'où : $J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

4) a) Montrons que la loi de Composition interne T est distributive par rapport à la loi de composition interne ''+'' dans E.
Soient $(a;b)$; $(c;d)$ et $(e;f)$ de $\mathbb{R}^2$.

On a : $M(a;b)T\big(M(c;d)+M(e;f)\big)=M(a;b)TM(c+e;d+f)$

$$=M\big(a(c+e)-b(d+f);a(d+f)+b(c+e)\big)$$
$$=M(ac+ae-bd-bf;ad+af+bc+be)$$

Et : • $\begin{cases}M(a;b)TM(c;d)=M(ac-bd;ad+bc)\\ M(a;b)TM(e;f)=M(ae-bf;af+be)\end{cases}$, alors : $\left(M(a;b)TM(c;d)\right)+\left(M(a;b)TM(e;f)\right)=M(ac-bd+ae-bf;ad+bc+af+be)$

$$=M(ac+ae-bd-bf;ad+af+bc+be)$$

$$=M(a;b)T\left(M(c;d)+M(e;f)\right)$$

Et comme T est commutative dans E, alors la loi de Composition interne T est distributive par rapport à la loi de composition interne "+" dans E.

b) ► On a : $(E;+)$ est un sous-groupe du groupe commutatif $\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+\right)$, donc :

$(E;+)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(0;0)$

► On a : $(E^*;T)$ est un groupe commutatif. ($E^*=E-\{M(0,0)\}$)

►T est distributive par rapport à "+" dans E.

Donc : $(E;+;T)$ est un corps Commutatif.

Exercice 2.

Partie I

1- Le discriminant de (E) est :

$$\Delta=\left(-2(m+1+i)\right)^2-4\times2\times\left(m^2+(1+i)m+i\right)$$

$$=4(m+1+i)^2-8\left(m^2+(1+i)m+i\right)$$

$$=4\left(m^2+2(1+i)m+(1+i)^2\right)-8\left(m^2+(1+i)m+i\right)$$

$$=4m^2+8(1+i)m+4(1+i)^2-8m^2-8(1+i)m-8i$$

$$=4m^2+8(1+i)m+8i-8m^2-8(1+i)m-8i$$

$$=-4m^2$$

Donc : $\boxed{\Delta=(2im)^2}$

2- Résolvons l'équation (E).

On a : $\Delta=(2im)^2$, donc $\delta=2im$ est une racine carrée de Δ

Donc les solutions de (E) sont : $z_1=\dfrac{2(m+1+i)+2im}{2\times2}=\dfrac{m+1+i+im}{2}=\dfrac{m+1+i(m+1)}{2}=(m+1)\dfrac{1+i}{2}$

$$z_2=\frac{2(m+1+i)-2im}{2\times2}=\frac{m+1+i-im}{2}=\frac{m+i-i^2-im}{2}=(m+i)\frac{1-i}{2}$$

Donc : $S=\left\{(m+1)\dfrac{1+i}{2};(m+i)\dfrac{1-i}{2}\right\}$

Partie II

1) a) On a : $z_1=(m+1)\dfrac{1+i}{2}$ et $z_2=(m+i)\dfrac{1-i}{2}$

Alors : $iz_2+1=i\left((m+i)\frac{1-i}{2}\right)+1$

$$=(m+i)\frac{i+1}{2}+1$$

$$=\left(m+i+\frac{2}{i+1}\right)\frac{i+1}{2}$$

$$=\left(\frac{(m+i)(i+1)+2}{i+1}\right)\frac{i+1}{2}$$

$$=\left(\frac{mi-1+m+i+2}{i+1}\right)\frac{i+1}{2}$$

$$=\left(\frac{m(i+1)+i+1}{i+1}\right)\frac{i+1}{2}$$

$$=\left(\frac{(m+1)(i+1)}{i+1}\right)\frac{i+1}{2}$$

$$=(m+1)\frac{i+1}{2}$$

Donc : $\boxed{iz_2+1=z_1}$

b) On a : $z_1-\omega=iz_2+1-\omega$

$$=iz_2+1-\frac{1+i}{2}$$

$$=iz_2+\frac{1-i}{2}$$

$$=i\left(z_2-\frac{1+i}{2}\right)$$

$$=\left(z_2-\omega\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc on M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega=\frac{1+i}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) On a : $\frac{z_2-m}{z_1-m}=\frac{(m+i)\frac{1-i}{2}-m}{(m+1)\frac{1+i}{2}-m}$

$$=\frac{(m+i)(1-i)-2m}{(m+1)(1+i)-2m}$$

$$=\frac{m+i-im+1-2m}{m+1+im+i-2m}$$

$$=\frac{1-m+i(1-m)}{1-m+i+im}$$

$$=\frac{(1+i)(1-m)}{i-m+1+im}$$

$$= \frac{i(1-i)(1-m)}{i-m+i(-i+m)}$$

$$= \frac{i(i-1)(m-1)}{(i-1)(m-i)}$$

Donc : $\boxed{\frac{z_2-m}{z_1-m} = i\frac{(m-1)}{(m-i)}}$

b) Supposons que M ; M_1 et M_2 sont alignées

Donc $\frac{z_2-m}{z_1-m} \in \mathbb{R}$

Alors : $i\frac{(m-1)}{(m-i)} \in \mathbb{R}$

D'où : $\frac{(m-1)}{(m-i)} \in i\mathbb{R}$

Par suite : $\arg\left(\frac{m-1}{m-i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

D'où : $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Alors : M appartient au cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

c) On a : $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega} = i \notin \mathbb{R}$, donc les points Ω ; M_1 et M_2 ne sont pas alignés , par suite les points Ω ; M ; M_1 et M_2 ne sont alignés .Donc :

Ω ; M ; M_1 et M_2 sont cocycliques $\Leftrightarrow \frac{z_1-\omega}{z_2-\omega} \times \frac{z_2-m}{z_1-m} \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow i \times i\frac{(m-1)}{(m-i)} \in \mathbb{R}$ (d'après la question II-2)a)

$\Leftrightarrow \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ Les points M ; A et B sont alignés.

$\Leftrightarrow M \in (AB)$ avec : $M \neq A$ et $M \neq B$ (car $m \neq 1$ et $m \neq i$)

Par suite : l'ensemble des points M tel que les points Ω ; M ; M_1 et M_2 soient cocycliques est la droite (AB) privée des points A et B.

Exercice 3

Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 5$.

1) Soit $(x;y)$ *un couple de* $IN^* \times IN^*$ *vérifiant :* $px + y^{p-1} = 2017$

a) Vérifions que : $p < 2017$.

Supposons que : $p \geq 2017$.

On a $(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *; donc* $x \geq 1$ *et* $y \geq 1$ *d'où:* $px \geq 2017$ *et* $y^{p-1} \geq 1$

donc $px + y^{p-1} \geq 2018$ *d'où :* $2017 \geq 2018$ *ce qui est absurde.*

Par suite : $p < 2017$.

b) Montrons que : p ne divise pas y.

Supposons que $p|y$ alors : $p|y^{p-1}$ donc : $y^{p-1} = kp \quad (k \in \mathbb{N})$

et on a : $px + y^{p-1} = 2017$ d'où : $px + kp = 2017$ par suite : $p|2017$

Et comme p et 2017 sont deux nombres premiers positifs , alors p=2017
ce qui contredit le fait que $p < 2017$

Donc p ne divise pas y.

c)Montrons que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis déduisons que p divise 2016.

∎) On a p est un nombre premier positif et p ne devise pas y.
Donc d'après le théorème de Fermat : $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$

∎) On a : $px \equiv 0[p]$ et $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$; donc : $px + y^{p-1} \equiv 1\ [p]$

D'où : $2017 \equiv 1[p]$

Par suite : $2016 \equiv 0[p]$. Alors p divise 2016.

d) Montrer que : $p = 7$.

On a $2016 = 2^5 3^2 7$ et p est un diviseur premier positif de 2016
Donc p=2 ou p=3 ou p=7
Et comme $p \geq 5$, alors p=7

2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ de $IN^* \times IN^*$ vérifiant l'équation :

$$px + y^{p-1} = 2017 \quad (E)$$

∎) d'après la question (1) : $(x;y)$ est solution de l'équation (E) ⇒p=7

Par contraposée, si $p \neq 7$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution.

∎) si $p = 7$; alors l'équation (E) devient : $7x + y^6 = 2017$ d'où $y^6 = 2017 - 7x$

Comme $x \geq 1$ alors $y^6 \leq 2010 < 2016$ donc $y^6 < 2^5 3^2 7 < 2^6 \times 64$

D'où : $y < 4$ et $(y \in \mathbb{N}^*)$ par suite : $y \in \{1;2;3\}$.

- **Si** $y = 3$ l'équation devient : $7x + 3^6 = 2017$ donc : $7x = 1288$ d'où : $x = 184$
- **Si** $y = 2$ l'équation devient : $7x + 2^6 = 2017$ donc : $7x = 1953$ d'où : $x = 279$
- **Si** $y = 1$ l'équation devient : $7x + 1^6 = 2017$ donc $7x = 2016$ alors : $x = 288$

Par suite : $S = \{(184;3);(279;2);(288;1)\}$.

Exercice 4

Partie I

1) a) Montrons que f est continue à droite en 0.

- On a : $f(0) = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{t \to -\infty} (1-t)e^t \ ; \ (t = -\frac{1}{x} \ ; \ x \to 0^+ \Rightarrow t \to -\infty)$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (e^t - te^t) = 0$$

(Car $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t = 0$)

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

Par suite f est continue à droite en 0.

b) Montrons que f est dérivable à droite en 0.

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(t^2-t\right)e^t \quad ; \quad \left(t=-\frac{1}{x}\ ;\ x\to0^+ \Rightarrow t\to-\infty\right)$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(t^2e^t - te^t\right) = 0 \qquad \left(\text{Car } \lim_{t\to-\infty} te^t = 0 \text{ et } \lim_{t\to-\infty} t^2e^t = 0\right)$$

D'où : f est dérivable à droite en 0 et $\boxed{f_d'(0)=0}$.

c) On a : $u : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u(]0;+\infty[) \subset \mathbb{R}$ et $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc $v : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Et on a : $x \mapsto 1+\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$; donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}}$

2) a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 1.$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$)

Interprétation géométrique

La Courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.

b) Tableau de variation de f :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

3) a) On a : $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right)$; $f'(x) = \dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$

Donc f' est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ comme produit de fonctions dérivables sur $\left]0;+\infty\right[$.

Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$; on a : $f''(x) = \left(\dfrac{1}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$

$$= -\frac{3x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \times \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \left(-\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \left(\frac{1-3x}{x^5}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

Donc : $\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right)$; $\boxed{f''(x) = \left(\dfrac{1-3x}{x^5}\right)e^{-\frac{1}{x}}}$

Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$; on a : $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ et $x^5 > 0$, alors $f''(x)$ est du même signe que $(1-3x)$ sur $\left]0;+\infty\right[$.

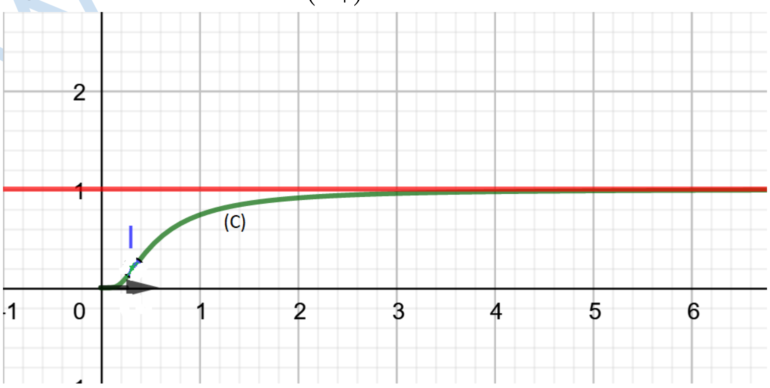
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

Donc ► $f''(x) < 0$ sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

► $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$

Comme $f''(x)$ s'annule et change de signe en $x_0 = \dfrac{1}{3}$ alors le point $I\left(\dfrac{1}{3};4e^{-3}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f)

b) **Construction de** (C_f)



Partie II

1) On a : $F : x \mapsto \int_x^1 f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt$

f est continue sur $[0;+\infty[$ et $1 \in [0;+\infty[$.

Donc F est dérivable sur $[0;+\infty[$, par suite F est continue sur $[0;+\infty[$.

2) a) Soit $x \in]0;+\infty[$

Posons : $\begin{cases} u(t) = e^{-\frac{1}{t}} \Rightarrow u'(t) = \dfrac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}} \\ v'(t) = 1 \quad \Rightarrow v(t) = t \end{cases}$

U et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$, et u' et v' sont dérivables sont $]0;+\infty[$ et d'après une intégration par partie , on a :

$$\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = \left[te^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1 - \int_x^1 t \times \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

$$= e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

D'où : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\boxed{\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt}$

b) Soit $x \in]0;+\infty[$

$$\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt = \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt + \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

$$= e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt + \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

$$= e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}$$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\boxed{\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}}$

c) On a : $\int_0^1 f(t)dt = F(0)$ et on a : $(\forall x > 0)$: $F(x) = \int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}$

Comme F est continue à droite en 0, alors :

$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$; d'où : $F(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{t\to -\infty}\left(e^{-1} + \frac{e^t}{t}\right) = e^{-1}$

D'où : $\boxed{\int_0^1 f(t)dt = e^{-1}}$

3) L'aire du domaine plan limité par (C_f) et les droites d'équations $x = 0 ; x = 2$ et $y = 0$; est :

$A = \int_0^2 |f(t)|dt \qquad (u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|)$

On a : $(\forall x \in [0;2])$; $f(x) \geq 0$ et $u.a = 4cm^2$

Donc : $A = \int_0^2 f(t)dt \quad \times 4cm^2$

$= \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt \quad 4cm^2$

$$= e^{-1} - \left(e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}\right) \quad 4cm^2$$

$$= 8e^{-\frac{1}{2}} \quad cm^2$$

Donc : $\boxed{A = 8e^{-\frac{1}{2}} \quad cm^2}$

4)a) Soit $n \in \mathbb{N}$

► f est continue sur l'intervalle $[n;n+2]$

► f est dérivable sur l'intervalle $]n;n+2[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis :

$(\exists v_n \in]n;n+2[) / F(n) - F(n+2) = (n-n-2)F'(v_n)$

Donc : $F(n) - F(n+2) = -2F'(v_n)$

On a : $F'(x) = -\left(\int_1^x f(t)dt\right)' = -f(x)$

D'où : $F'(x) = -\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

Par suite, $(\exists v_n \in]n;n+2[)$: $\quad u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $n < v_n < n+2$ et f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$; donc

$f(n) < f(v_n) < f(n+2)$

Donc : $\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}} < \left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

D'où : $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} < u_n < 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\boxed{2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} < u_n < 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}}$

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} < u_n < 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}} = 2$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

<u>Partie III</u>

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons que l'équation $f(x) = e^{-\frac{1}{n}}$ admet une solution unique α_n dans $]0;+\infty[$

► f est continue sur $]0;+\infty[$.

► f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

► $e^{-\frac{1}{n}} \in f(]0;+\infty[) =]0;1[$

D'où : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; l'équation $f(x)=e^{-\frac{1}{n}}$ admet une solution unique a_n dans $]0;+\infty[$.

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $(\exists! a_n \in]0;+\infty[)$: $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $f(a_{n+1})=e^{-\frac{1}{n+1}}$ et $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$

Et comme, $\frac{-1}{n} < \frac{-1}{n+1}$, alors $e^{\frac{-1}{n}} < e^{\frac{-1}{n+1}}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $f(a_n) < f(a_{n+1})$

Et comme f est une bijection strictement croissante sur $]0;+\infty[$; alors f^{-1} est une bijection strictement croissante sur $]0;1[$, donc : $f^{-1}(f(a_n)) < f^{-1}(f(a_{n+1}))$

D'où : ; $a_n < a_{n+1}$

Par suite (a_n) est une suite croissante.

c) soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \ln(f(a_n))=-\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)e^{-\frac{1}{a_n}}\right)=-\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)+\ln\left(e^{-\frac{1}{a_n}}\right)=-\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)-\frac{1}{a_n}=-\frac{1}{n}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\boxed{-\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}}$

2) a) Soit $t \in [0;+\infty[$

•) On a : $1-t-\frac{1}{1+t}=\frac{-t^2}{1+t} \leq 0$.

Donc : $1-t \leq \frac{1}{1+t}$

•) On a : $\frac{1}{1+t}-(1-t+t^2)=\frac{1-1+t-t^2-t+t^2-t^3}{1+t}$

$$=\frac{-t^3}{1+t} \leq 0$$

Donc : $\frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

D'où $(\forall t \in [0;+\infty[)$; $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

b) Soit $x \in [0;+\infty[$, et soit $0 \leq t \leq x$

D'après la question précédente, on a : $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$.

Les fonctions $t \mapsto 1-t$, $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $t \mapsto 1-t+t^2$ sont continues sur $[0;+\infty[$, donc :

$$\int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \leq \int_0^x (1-t+t^2)dt$$

D'où : $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[\ln(1+t)\right]_0^x \leq \left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^x$

Alors : $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Par suite : $(\forall x \in [0,+\infty[)$; $\boxed{-\frac{x^2}{2} \leq -x+\ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$

3) a) On a : $f(a_4)=e^{-\frac{1}{4}}$; $f(1)=2e^{-1}$

On a : $\ln\left(e^{-\frac{1}{4}}\right)-\ln\left(2e^{-1}\right)=\frac{-1}{4}-\ln(2)+1=\frac{3}{4}-\ln(2)$ et $\frac{3}{4}>\ln(2)$

Donc $e^{-\frac{1}{4}} \geq 2e^{-1}$, par suite $f(a_4) \geq f(1)$

Comme f est une bijection strictement croissante alors f^{-1} l'est aussi ; on a donc :
$f^{-1}(f(a_4)) \geq f^{-1}(f(1))$

D'où : $\boxed{a_4 \geq 1}$.

*Montrons par récurrence que : $(\forall n \geq 4)$: $a_n \geq 1$

•pour $n=4$; on a : $a_4 \geq 1$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ / $n \geq 4$

Supposons que $a_n \geq 1$ et montrons que : $a_{n+1} \geq 1$

La suite (a_n) est croissante, donc : $a_{n+1} \geq a_n$ **(1)**

Et d'après l'hypothèse de récurrence : $a_n \geq 1$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** on déduit que $a_{n+1} \geq 1$

On conclut que : $\boxed{(\forall n \geq 4) ; a_n \geq 1}$

b) On a d'après la question 2) b) **partie III** :

$(\forall x \in]0;+\infty[)$; $-\frac{x^2}{2} \leq -x+\ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Prenons $x=\frac{1}{a_n}$, alors $\frac{1}{a_n}>0$ (car $a_n>1$ alors $\frac{1}{a_n} \in]0;+\infty[$)

Donc : $-\frac{1}{2a_n^{\ 2}} \leq -\frac{1}{a_n}+\ln(1+\frac{1}{a_n}) \leq -\frac{1}{2a_n^{\ 2}}+\frac{1}{3a_n^{\ 3}}$

Et d'après la question 1) c) **partie III** :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $-\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}$

Donc : $-\frac{1}{2a_n^{\ 2}} \leq -\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{2a_n^{\ 2}}+\frac{1}{3a_n^{\ 3}}$

Alors : $-\frac{1}{2} \leq -\frac{a_n^{\ 2}}{n} \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3a_n}$

Donc : $\frac{1}{2} - \frac{1}{3a_n} \leq \frac{a_n^{\ 2}}{n} \leq \frac{1}{2}$

Par suite : $\boxed{(\forall n \geq 4);\ 1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^{\ 2}}{n} \leq 1}$

c) On a pour tout $n \geq 4$; $a_n \geq 1$

Donc : $3a_n \geq 3$

D'où : $\frac{2}{3a_n} \leq \frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3} \leq -\frac{2}{3a_n}$

Par suite $\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{3a_n}$

Comme $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^{\ 2}}{n}$, alors : $\frac{1}{3} \leq \frac{2a_n^{\ 2}}{n}$

D'où : $\frac{n}{6} \leq a_n^{\ 2}$, par suite : $a_n \geq \sqrt{\frac{n}{6}}$

Et comme $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{6}} = +\infty$, alors : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty}$

d) On a : $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^{\ 2}}{n} \leq 1$

Donc : $\sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} \leq a_n \sqrt{\frac{2}{n}} \leq 1$ (Car $1 - \frac{2}{3a_n} \geq 0$.)

Comme $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$; alors : $\lim_{n \to +\infty} \frac{-2}{3a_n} = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} = 1$

Par suite : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}} = 1}$