

Exercice 1:

Soit la suite (a_n) définie par :
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \end{cases} ; \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

1. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} ; a_n > 1$.

2. a. Montrer que: $a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n - 1)^2}{a_n}$; puis déduire la monotonie de la suite (a_n) .

b. Montrer que la suite (a_n) est convergente.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$; on pose : $v_n = \frac{a_n - 2}{a_n - 1}$.

a. Calculer v_0 puis montrer que : $v_{n+1} - v_n = -1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $v_n = -n$.

c. Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $a_n = \frac{n+2}{n+1}$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ tel que (w_n) est la suite définie par: $w_n = \ln(a_n)$.

Exercice 2:

On considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient l'équation :

$$mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0$$

Avec m un paramètre réel non nul.

1) Montrer que (S_m) est une sphère pour tout $m \in \mathbb{R}^*$.

2) Montrer que toutes les sphères se coupent selon un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Exercice 3:

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les

points A ; B et C d'affixes respectives: $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = \sqrt{2} + 1 + i$; $c = \bar{b}$.

a. Montrer que : $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

b. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et B l'image de C par la rotation R .

Montrer que: $b = ac$.

c. Déduire que : $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$ et montrer que : $|b| = \sqrt{2(\sqrt{2} + 2)}$.

d. En déduire que : $b^4 = 4(\sqrt{2} + 2)^2 i$ et les valeurs de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

3. On considère le point D d'affixe $d = 2$.

a. Vérifier que : $b - d = i(c - d)$.

b. Déduire que : $DB = DC$ puis déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DB})$.

c. Déduire la nature du triangle BDC.

Exercice 4:

Dans un lycée il y a 4 classes de terminale ES avec 4 professeurs : M_1, M_2, M_3, M_4 . Lors des devoirs communs les élèves constatent que la probabilité qu'un sujet sur les suites « Tombe » dépend du professeur rédacteur du devoir et Ils savent que :

- M_1 rédige le devoir 1 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 2
- M_2 rédige le devoir 3 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 4
- M_3 rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est toujours présent
- M_4 rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 3

On appelle :

M_i l'  v  nement « le rédacteur du sujet est le professeur M_i »

S l'  v  nement « le sujet sur les suites est présent dans le devoir »

- 1) Dresser un arbre pondéré
- 2) Calculer la probabilité de S

Problème:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = 2x + x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) & ; \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Montrer que f est impaire.

2. a. Vérifier que $\forall x \in]0; +\infty[; x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = x \ln(1 + x^2) - 2x \ln(x)$.

b. Déduire que f est continue à droite en 0.

c.   tudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; puis interpréter le résultat.

3. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; f'(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}$.

b. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) > 0$.

c. Déduire que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$; puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

5. a. Montrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$. (poser $t = \frac{1}{x^2}$)

b. Déduire que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) > 2x$; déduire que (C) est au-dessus de la droite (Δ) Sur $]0; +\infty[$.

6. Tracer la courbe (C) et la droite (Δ) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité: 1cm)

7. Montrer que: $\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{2} \right)$.

8. En utilisant une intégration par partie, montrer que: $\int_1^2 x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{5}{2} \ln \left(\frac{5}{4} \right)$.

9. Déduire en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) ; (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.