

Exercice 22

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty; 0]$ par : $f(x) = \sqrt{1-e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, et interpréter géométriquement le résultat.
- 2- Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, et en déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$.
- 3- Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty; 0]$ et dresser le tableau de variations de f .
- 4- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0; 1[$, et que : $f^{-1}(x) = \ln(1-x^2)$ pour tout x de $[0; 1[$.
- 5- Tracer dans le même repère $(O; i, j)$, la courbe (C) et la courbe (C') de la fonction f^{-1}

Solution

$$f(x) = \sqrt{1-e^x}$$

1) Montrons que: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Soit $x \in]-\infty; 0[$, on a :
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1-e^x}}{x} = -\sqrt{\frac{1-e^x}{x^2}}$$
$$= -\sqrt{\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \times \left(\frac{-1}{x}\right)}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \times \left(\frac{-1}{x}\right)} = -\infty$

(Car : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-1}{x}\right) = +\infty$)

d'où:
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

Interprétation géométrique:

On a: $f(0)=0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 0, et que la courbe (C) de f admet une demi-tangente en O dirigée en haut.

2) Montrons que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-e^x} = 1$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$)

donc:
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1}$$

Interprétation géométrique :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation: $y=1$ est une asymptote horizontale à (C) . au voisinage de $-\infty$.

3) Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$:

On a : la fonction $x \mapsto 1 - e^x$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $1 - e^x > 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$ donc, la fonction f

est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et on a : $(\forall x \in]-\infty; 0[) f'(x) = \frac{(1 - e^x)'}{2\sqrt{1 - e^x}} = \frac{-e^x}{2\sqrt{1 - e^x}}$

Tableau de variations de f :

$x \in]-\infty; 0[$ On a : $-e^x < 0$

et $\sqrt{1 - e^x} > 0$ donc: $f'(x) < 0$

D'où : $(\forall x < 0) \boxed{f'(x) < 0}$

Le tableau de variations de f est le suivant:

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	-	$-\infty$
$f(x)$	1	0

4) ■ Montrons que: f admet une fonction réciproque

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(]-\infty; 0[)$ telle que :

$$f(]-\infty; 0[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [0; 1[$$

■ Montrons que : $f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)$ pour tout $x \in [0; 1[$

Soit $x \in [0; 1[$ et $y \in]-\infty; 0[$ tels que : $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - e^y} = x$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^y = x^2$$

$$\Leftrightarrow e^y = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \ln(1 - x^2)$$

Donc : $(\forall x \in [0; 1[) \boxed{f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)}$

5) Construction de (C) et (C')

La courbe (C') est le symétrique de la courbe (C) par rapport à la première bissectrice dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

