Devoir surveillé n°3 2éme semestre **2éme Bac SM**

Logarithme Néperien

Exercice 01 : (5,5 points)

On considère la fonction f_n *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $f_n(x) = e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ *Où* $n \in \mathbb{N}$.

1)- a)- *Justifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^+), f_{n+1}'(x) = -f_n(x)$.

b)- *Montrer par récurrence que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^+), f_{2n}(x) \leq 0 \leq f_{2n+1}(x)$.

2)- *Soit* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}), S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$ *, On pose :* $u_n = S_{2n}$ *et* $v_n = S_{2n+1}$.

a)- *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes . Que peut-on conclure ?*

b)- *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n \leq \frac{1}{e} \leq u_n$ *. Puis en déduire la limite commune des suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3)- *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \left| S_n - \frac{1}{e} \right| \leq \frac{1}{n}$ *. Puis en déduire que la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente en précisant sa limite.*

Exercice 02 : (14,5 points)

I- Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(0) = 1$ *et* $f(x) = \frac{2x.e^x}{e^{2x} - 1}$, si $x \neq 0$.

1)- a)- *Etudier la parité de* f .

b)- *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

c)- *Calculer* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *. Puis interpréter géométriquement le résultat.*

2)- a)- *Montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), f'(x) = \frac{2e^x.g(x)}{(e^{2x}-1)^2} \text{ Où } g(x) = (1-x)e^{2x} - (1+x).$$

b)- *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), g(x) < 0$*.Puis déduire la monotonie de* f *sur* $\mathbb{R}^+$.

c)- *Dresser le tableau de variation de* f *en justifiant votre réponse.*

3)- a)- *Vérifier que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right),\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{u(x)}{x\left(e^{x}-e^{-x}\right)}$ *Où* $u(x)=2x-e^{x}+e^{-x}$.

b)- *Justifier que la fonction* u' *est décroissante sur* $\mathbb{R}^{+}$.

c)- *Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :*

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right),\frac{u'(x)}{e^{x}-e^{-x}}\leq\frac{f(x)-1}{x}.$$

d)- *En déduire que* f *est dérivable à droite en 0 et préciser* $f_d'(0)$.

4)- *Construire la courbe* $\left(C_f\right)$ *dans un repère orthonormé.*

5)- a)- *Montrer que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^{*}\right)\left(\exists! a_n\in\mathbb{R}^{+}\right), f\left(a_n\right)=n.\left(a_n\right)^{2}$.

b)- *Montrer que la suite* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ *est décroissante , Puis en déduire qu'elle est convergente .*

c)- *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ *, Puis en déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}.a_n=1$.

II- On considère la fonction G *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $G(0)=1$ *et* $G(x)=\dfrac{F(x)}{x}$, si $x\neq0$.

Où F *est la fonction primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$ *telle que :* $F(0)=0$.

1)- a)- *Montrer que* G *est continue en 0 .*

b)- *Montrer que* G *est paire (On pourra étudier la parité de* F *) .*

2)- a)- *Montrer que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right), f(x)<G(x)<1.$

b)- *En déduire que* G *est dérivable en 0 et préciser* $G'(0)$.

3)- *Montrer que* G *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right),G'(x)=\dfrac{f(x)-G(x)}{x}$.

4)- *Dans cette question on admet que :* $\left(\forall x\geq1\right), f(x)\leq\dfrac{2}{x}$.

a)- *Montrer que :* $\left(\forall x\geq1\right),G(x)\leq\dfrac{F(1)}{x}+2.\dfrac{\ln x}{x}$.

b)- *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$, *Puis dresser le tableau de variation de* G .

Correction

Exercice 01 :

$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right)$; $f_n(x)=e^{-x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$ Où $n\in\mathbb{N}$.

1)- a)- *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}^{+}$ *;On a :* $f_{n+1}'(x)=\left(e^{-x}-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right)'$.

$$=-e^{-x}-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k\times k}{k!}x^{k-1}$$

$$=-e^{-x}-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^{k-1}$$

$$=-e^{-x}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}$$

On pose un changement d'indice $=-\left(e^{-x}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k}x^k\right)$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right)$, $\boxed{f_{n+1}'(x)=-f_n(x)}$

b) *On a :* $(\forall n\in\mathbb{N})$; $f_n(0)=0$

Montrons par récurrence que pour tout $x\in\mathbb{R}^{+}$: $(\forall n\in\mathbb{N})$: $f_{2n}(x)\leq 0\leq f_{2n+1}(x)$

► ***Pour n = 0***

$f_{2\times 0}(x)=e^{-x}-1$ *; et comme* $x\geq 0$ *alors* $e^{-x}-1$

Donc $f_0(x)\leq 0$

Et $f_{2\times 0+1}(x)=f_1(x)$

D'autre part on a : $f_1'(x)=-f_0(x)\geq 0$

Donc f_1 *est croissante ; d'où :* $x\geq 0\Rightarrow f_1(x)\geq f_1(0)$ *et* $f_1(0)=0$

Par suite $f_1(x)\geq 0$

Donc $f_0(x)\leq 0\leq f_1(x)$

► ***Pour n ∈ IN***

Supposons que $f_{2n}(x)\leq 0\leq f_{2n+1}(x)$ *et montrons que* $f_{2n+2}(x)\leq 0\leq f_{2n+3}(x)$

On a : $f_{2n}(x)\leq 0\leq f_{2n+1}(x)\Leftrightarrow -f_{2n+1}(x)\leq 0\leq -f_{2n}(x)$

$$\Leftrightarrow f'_{2n+2}(x)\leq 0\leq f'_{2n+1}(x)$$

Donc f_{2n+2} *est décroissante ; d'où* $f_{2n+2}(x)\leq f_{2n+2}(0)$ *et* $f_{2n+2}(0)=0$

Alors $f_{2n+2}(x)\leq 0$

Donc f_{2n+1} *est croissante ; d'où* $f_{2n+1}(x)\geq f_{2n+1}(0)$ *et* $f_{2n+1}(0)=0$

Alors $f_{2n+1}(x)\geq 0$

Par suite $f_{2n+2}(x)\leq 0\leq f_{2n+1}(x)$

Par le même raisonnement on obtient :

: $f_{2n+2}(x)\leq 0\leq f_{2n+1}(x)\Leftrightarrow -f_{2n+1}(x)\leq 0\leq -f_{2n+2}(x)$

$$\Leftrightarrow f'_{2n+2}(x)\leq 0\leq f'_{2n+3}(x)$$

Donc f_{2n+2} *est décroissante ; d'où* $f_{2n+2}(x)\leq f_{2n+2}(0)$ *et* $f_{2n+2}(0)=0$

Alors $f_{2n+2}(x)\leq 0$

Donc f_{2n+3} *est croissante ; d'où* $f_{2n+3}(x)\geq f_{2n+3}(0)$ *et* $f_{2n+3}(0)=0$

Alors $f_{2n+3}(x)\geq 0$

Par suite $f_{2n+2}(x)\leq 0\leq f_{2n+3}(x)\Leftrightarrow f_{2(n+1)}(x)\leq 0\leq f_{2(n+1)+1}(x)$

Conclusion *: pour tout* $x\in\mathbb{R}^+$: $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N});\ f_{2n}(x)\leq 0\leq f_{2n+1}(x)}$

2) $(\forall n\in\mathbb{N})$; $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$; $u_n=S_{2n}$ *et* $v_n=S_{2n+1}$.

a) *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *; on a :*

► $u_{n+1}-u_n=S_{2n+2}-S_{2n}$

$$=\sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k!}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!}+\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cancel{\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}}-\cancel{\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}}$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\big(1-(2n+2)\big)$$

$$= -\frac{2n+1}{(2n+2)!}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n < 0$

D'où la suite (u_n) *est décroissante.*

► $v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

$$= \frac{-1}{(2n+3)!}\left(1-(2n+3)\right)$$

$$= \frac{2n+2}{(2n+3)!}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} - v_n > 0$

D'où la suite (v_n) *est croissante.*

► *De plus on a :* $u_n - v_n = S_{2n} - S_{2n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}} - \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{2n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$; *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Donc les suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont adjacentes ; on en déduit qu'elles sont convergentes vers la même limite.

b) *D'après la question* ***1)b)*** *on a : pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); f_{2n}\left(x\right) \leq 0 \leq f_{2n+1}\left(x\right)$

Donc pour $x = 1$*; on obtient* $f_{2n}\left(1\right) \leq 0 \leq f_{2n+1}\left(1\right)$ *; or* $f_{2n}\left(1\right) = \frac{1}{e} - u_n$ *et* $f_{2n}\left(1\right) = \frac{1}{e} - v_n$

D'où $\frac{1}{e} - u_n \leq 0 \leq \frac{1}{e} - v_n \Leftrightarrow v_n \leq \frac{1}{e} \leq u_n$

Donc $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ *;* $\boxed{v_n \leq \frac{1}{e} \leq u_n}$

3) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *; raisonnons par disjonction de Cas :*

1^er Cas : *n est paire ;* $\left(\exists k \in \mathbb{N}^*\right) / \ n = 2k$

On a : $S_n = S_{2k} = u_k$ *et comme* $v_k \leq \frac{1}{e} \leq u_k \Leftrightarrow -u_k + v_k \leq -u_k + \frac{1}{e} \leq 0$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_k - \frac{1}{e} \leq u_k - v_k$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_k - \frac{1}{e} \leq \frac{1}{\left(2k+1\right)!}$$

Et $\frac{1}{\left(2k+1\right)!} \leq \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2k}$ *; donc* $\frac{1}{\left(2k+1\right)!} \leq \frac{1}{2k} = \frac{1}{n}$

D'où $\boxed{0 \leq S_n - \frac{1}{e} \leq \frac{1}{n}}$

2éme Cas : *n est impaire ;* $\left(\exists k \in \mathbb{N}^*\right) / \ n = 2k+1$

On a : $S_n = S_{2k+1} = v_k$ *et comme* $v_k \leq \frac{1}{e} \leq u_k \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{e} - v_k \leq u_k - v_k$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{e} - v_k \leq \frac{1}{\left(2k+1\right)!}$$

Et $\dfrac{1}{(2k+1)!}=\dfrac{1}{n!}\le\dfrac{1}{n}$

D'où $\boxed{0\le\dfrac{1}{e}-S_n\le\dfrac{1}{n}}$

On conclut que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\left|S_n-\dfrac{1}{e}\right|\le\dfrac{1}{n}$ *; comme* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ *alors* (S_n) *est convergente et*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{e}}$$

Exercice 02 :

I-Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x.e^x}{e^{2x}-1} & ,si\quad x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1)- a)- *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$*; on a* $(-x)\in\mathbb{R}^*$ *et :*
$$f(-x)=\frac{2(-x).e^{-x}}{e^{-2x}-1}$$
$$=\frac{2(-x).e^{-x}}{e^{-2x}-1}\times\frac{e^{2x}}{e^{2x}}$$
$$=-\frac{2x.e^{x}}{1-e^{2x}}$$
$$=\frac{2x.e^{x}}{e^{2x}-1}$$
$$=f(x)$$

Comme $f(-0)=f(0)$

Alors $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(-x)=f(x)$ *; donc f est paire.*

b) *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$*; on a :*
$$f(x)=\frac{2x.e^x}{e^{2x}-1}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}\times e^x$$

Et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$ *; donc* $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ *et* $f(0)=1$

Donc f est continue en 0.

De plus la fonction $x \mapsto 2x.e^{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^{*}$ *comme produit de deux fonctions continue sur* $\mathbb{R}^{*}$ *; la fonction* $x \mapsto e^{2x}-1$ *est continue sur* $\mathbb{R}^{*}$ *et* $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*}\right)$ *;* $e^{2x}-1 \neq 0$.

Donc f est continue sur chacun des intervalle $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$ *(comme quotient de deux fonctions continue sur* $\mathbb{R}^{*}$*)*

Par suite f est continue sur $\mathbb{R}$ *.*

c) *On a :* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-1=-1$ *(car* $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$*)*

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$

Interprétation géométrique : *La courbe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de* $-\infty$ *.*

2) a) *la fonction* $x \mapsto 2x.e^{x}$ *et la fonction* $x \mapsto e^{2x}-1$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}_{+}^{*}$ *et* $\left(\forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*}\right)$ *;* $e^{2x}-1 \neq 0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ *(comme quotient de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}_{+}^{*}$*)*

Et pour tout $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ *; on a :* $f'(x)=\left(\dfrac{2x.e^{x}}{e^{2x}-1}\right)'$

$$= 2\times\left(\frac{\left((1+x).e^{x}\right)\left(e^{2x}-1\right)-2e^{2x}\times x.e^{x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{2}}\right)$$

$$= 2\times e^{x}\left(\frac{(1+x)\left(e^{2x}-1\right)-2e^{2x}\times x}{\left(e^{2x}-1\right)^{2}}\right)$$

$$= 2\times e^{x}\left(\frac{e^{2x}-1+xe^{2x}-x-2xe^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{2}}\right)$$

$$= 2\times e^{x}\left(\frac{e^{2x}-xe^{2x}-x-1}{\left(e^{2x}-1\right)^{2}}\right)$$

$$= 2\times e^{x}\left(\frac{(1-x)e^{2x}-(1+x)}{\left(e^{2x}-1\right)^{2}}\right)$$

Donc $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{2e^x\times g(x)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}}$ *Où* $g(x)=(1-x)e^{2x}-(1+x)$

b) *La fonction g est dérivable sur* $\mathbb{R}^+$ *et pour tout* $x\in\mathbb{R}^+$ *; on a :*

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{2x}+2(1-x)e^{2x}-1 \\ &= -e^{2x}+2e^{2x}-2xe^{2x}-1 \\ &= e^{2x}-2xe^{2x}-1 \end{aligned}$$

g' *est aussi dérivable sur* $\mathbb{R}^+$*, et pour tout* $x\in\mathbb{R}^+$

On a : $g''(x)=\cancel{2e^{2x}}-\cancel{2e^{2x}}-4xe^{2x}$

$$=-4xe^{2x}$$

Comme $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$; $g''(x)\le 0$*; alors:* g' *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^+$.

Donc $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$; $g'(x)\le g'(0)$ *et* $g'(0)=0$

Alors : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$; $g'(x)\le 0$

Donc g *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^+$*; et* $g(0)=0$*; d'où :*$\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$*;* $g(x)\le 0$

Comme : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $f'(x)=\dfrac{2e^x\times g(x)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

Alors le signe de $f'(x)$ *est celui de* $g(x)$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) *On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)=\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=0$ *.(Car f est paire).*

Et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ *; donc elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^-$

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0

3) a) *pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$*, on a :* $f(x)=\dfrac{2x.e^x}{e^{2x}-1}$

$$=\frac{2x}{e^x-e^{-x}}$$

Donc : $f(x)-1=\dfrac{2x}{e^{x}-e^{-x}}-1$

$$=\frac{2x-e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

par suite ; $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{2x-e^{x}+e^{-x}}{x\left(e^{x}-e^{-x}\right)}$

$$=\frac{u(x)}{x\left(e^{x}-e^{-x}\right)} \text{ où } u(x)=2x-e^{x}+e^{-x}$$

b) *La fonction u est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}^{+}$*, (Car elle est Somme de fonctions deux fois dérivables sur* $\mathbb{R}^{+}$*; et on a pour bout* $x\in\mathbb{R}^{+}: u'(x)=2-e^{x}-e^{-x}$ *et*

$u''(x)=-e^{x}+e^{-x}$

On a : $x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -x$

$$\Leftrightarrow e^{x}\geq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}-e^{x}\leq 0$$

Donc $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right)$ *;* $u''(x)\leq 0$

D'où u' *est décroissante sur* $\mathbb{R}^{+}$.

c) *Soit* $x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$

La fonction u est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}^{+}$ *; elle donc dérivable et continue sur* $[0;x]$*; En appliquant le théorème des*

accroissements finis à u sur $[0;x]$*;* $\left(\exists c\in]0;x[\right)/\dfrac{u(x)-u(0)}{x}=u'(c)$

Comme $u(0)=0$ *; donc ;* $\left(\exists c\in]0;x[\right)/\dfrac{u(x)}{x}=u'(c)$

On a : $0<c<x \Rightarrow u'(x)\leq u'(c)$ *(car* u' *est décroissante sur* $\mathbb{R}^{+}$*).*

$$\Rightarrow u'(x)\leq \frac{u(x)}{x}$$

$$\Rightarrow u'(x)\leq \frac{u(x)}{x}$$

On a : $x>0 \Leftrightarrow x>-x$

$$\Leftrightarrow e^{x}>e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}>0$$

Donc $\dfrac{u'(x)}{e^x - e^{-x}} \leq \dfrac{u(x)}{x(e^x - e^{-x})}$

Et d'après la question **3)a)** on a : $\dfrac{u(x)}{x(e^x - e^{-x})} = \dfrac{f(x)-1}{x}$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\boxed{\dfrac{u'(x)}{e^x - e^{-x}} \leq \dfrac{f(x)-1}{x}}$

d) *Calculons* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{u'(x)}{e^x - e^{-x}}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *; on a :*

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{e^x - e^{-x}} &= \frac{2 - e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{2 - 2e^{-x} + e^{-x} - e^x}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{2(1 - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{2(1 - e^{-x})}{e^x - e^{-x}} - 1 \\ &= \frac{2e^x(1 - e^{-x})}{e^{2x} - 1} - 1 \\ &= \frac{2\cancel{(e^x - 1)}}{\cancel{(e^x - 1)}(e^x + 1)} - 1 \\ &= \frac{2}{(e^x + 1)} - 1 \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{u'(x)}{e^x - e^{-x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{2}{(e^x + 1)} - 1 \right) = 0$

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ *; donc :* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $f(x) < f(0)$ *et*

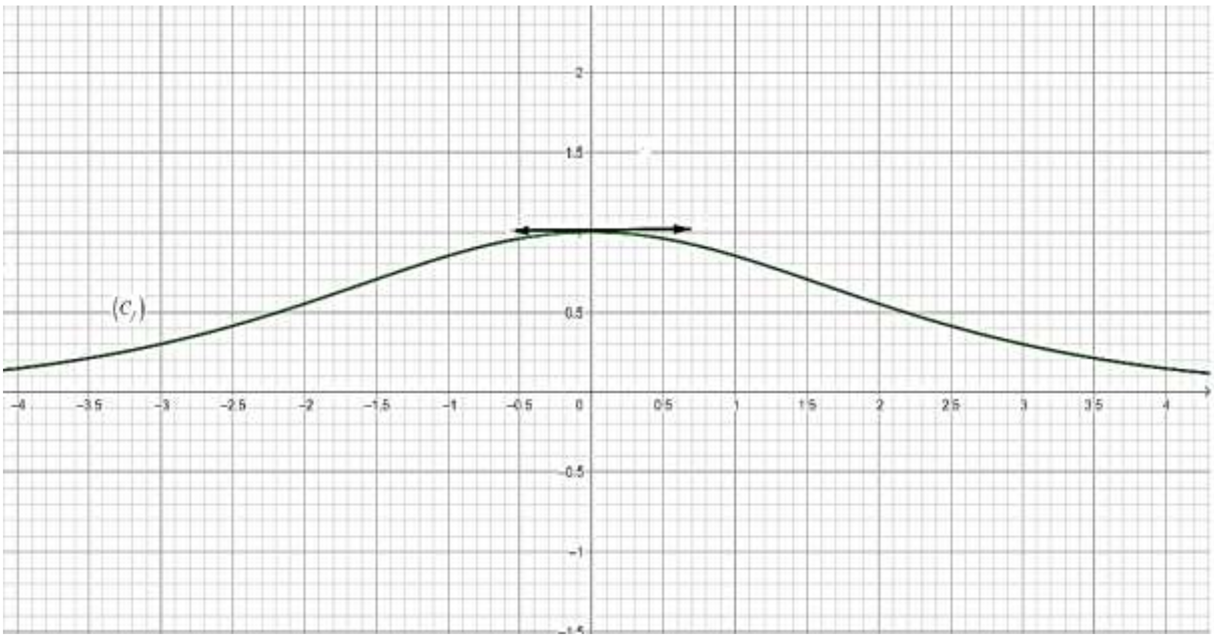
$f(0) = 1$ *; d'où* $\dfrac{f(x)-1}{x} < 0$

Comme $\dfrac{u'(x)}{e^x - e^{-x}} \leq \dfrac{f(x)-1}{x} < 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{u'(x)}{e^x - e^{-x}} = 0$

Alors $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 0}$

D'où f est dérivable à droite en 0 et $\boxed{f'_d(x)=0}$

4) Construction de la courbe de f



5) a) Considérons le fonction le définie par : $h(x) = f(x) - nx^2$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto nx^2$ sont continues et strictement décroissantes-sur $\mathbb{R}^+$, donc h est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$; de plus : $h(0) = f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

(Car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} -nx^2 = -\infty$)

Donc h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers l'intervalle $h(\mathbb{R}^+) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x); h(0)\right] =]-\infty;1]$

Comme $0 \in]-\infty;1]$; alors l'équation $h(x) = 0$ (càd $f(x) = nx^2$) admet une unique solution a_n dans $\mathbb{R}^+$.

Par Suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists! a_n \in \mathbb{R}^+) / f(a_n) = na_n{}^2$

b) Etudions le monotonie de la suite a_n.

pour tat $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f(a_{n+1}) = (n+1)a_{n+1}^2$; donc : $h(a_{n+1}) = f(a_{n+1}) - na_{n+1}^2$

$$= (n+1)a_{n+1}^2 - na_{n+1}^2 = a_{n+1}^2$$

Donc $h(a_{n+1})>0$ et $h(a_n)=0$

Alors $h(a_{n+1})>h(a_n)$

La fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$; donc sa bijection réciproque est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$

par suite : $h^{-1}(h(a_{n+1}))\leq h^{-1}(h(a_n))$

d'où $a_{n+1}\leq a_n$

Donc la suite (a_n) est décroissante de plus elle est minorée par 0; donc elle est convergente.

c) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$

Posons : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Comme $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $a_n\geq 0$

Alors : $\ell\geq 0$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors f est continue en ℓ.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=f(\ell)$ = f(l).

Si $\ell\neq 0$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n^{\ 2}=+\infty$

O r : $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n^{\ 2}=\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=f(\ell)$

Ce que est absurde

D'ou : $\ell=0$

Cà d : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ et f est continue en 0; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=f(0)=1$.

Par Suite $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n^{\ 2}=1$

Comme la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue en 1

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{na_n^{\ 2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}a_n=1.$

II- $G:\begin{cases} G(x)=\dfrac{F(x)}{x} & si\ \ x\neq 0\\ G(0)=1 \end{cases}$

où f est le primitive de f sur $\mathbb{R}$ tel que $\cdot$ $F(0)=0$

1) a) Calculons $\lim\limits_{x\to 0} G(x)$.

On a : $\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \quad (\text{car } F(0)=0)$$

$$= F'(0)$$

$$= f(0) = 1$$

Donc $\lim_{x\to 0} G(x) = 1$ *et* $G(0)=1$

Alors : G est continue en 1.

b) *Montrons que F est impaire.*

On considère la fonction φ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$

φ *est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *; et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a :* $\varphi'(x) = F'(x) - F'(-x)$

$$= f(x) - f(-x) = 0 \; (\text{car } f \text{ est paire})$$

Par suite φ *est constante sur* $\mathbb{R}$ *; de plus* $\varphi(0) = F(0) + F(0) = 0$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $\varphi(x) = 0$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R})$ *;* $F(x) = -F(-x)$

Alors F est impaire.

On a : • $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ *;* $(-x) \in \mathbb{R}^*$

• $G(-x) = \frac{F(-x)}{-x}$

$$= \frac{-F(x)}{-x}$$

$$= \frac{F(x)}{x} = G(x)$$

Donc G est paire.

2) a) *soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *;*

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et* $F'(t) = f(t)$ *; en particulier elle dérivable sur* $[0;x]$ *;*

en appliquant le théorème des accroissements finis à F sur $[0;x]$ *; on obtient :*

$$(\exists c \in]0;x[) \; / \; \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(c) \text{ Càd : } G(x) = f(c)$$

Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ *; alors :* $0 < c < x \Rightarrow f(x) < f(c) < f(0)$

$$\Rightarrow f(x) < G(x) < 1$$

Donc $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $\boxed{f(x)<G(x)<1}$

b) pour tout $x>0$, on a : $f(x)<G(x)<1\Rightarrow f(x)-1<G(x)-1<0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x}<\frac{G(x)-G(0)}{x}<0$$

Gomme f est dérivable à droite en 0 ; et $f_d'(0)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

Par suite : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{G(x)-G(0)}{x}=0$

D'où G est dérivable à droite en 0 et $G_d'(0)=0$

On a : $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{G(x)-G(0)}{x}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{G(-t)-G(0)}{-t}$

$$=-\lim_{t\to0^+}\frac{G(t)-G(0)}{t}=0$$

D'où G est dérivable à gauche en 0 et $G_g'(0)=0$

<u>Conclusion</u>

Comme G est dérivable à droite et à gauche en 0 et $G_d'(0)=G_g'(0)=0$; alors G est dérivable en 0 et $G'(0)=0$

3) les fonctions $x\mapsto F(x)$ et $x\mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x\neq0$; donc la fonction sur $G:x\mapsto\frac{F(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$; on a :

$$G'(x)=\frac{xF'(x)-F(x)}{x^2}$$

$$=\frac{F'(x)-\frac{F(x)}{x}}{x}$$

$$=\frac{f(x)-G(x)}{x}$$

Donc : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $\boxed{G'(x)=\frac{f(x)-G(x)}{x}}$

4) a) Montrons que : $(\forall x\geq1)$; $F(x)\leq F(1)+2\ln x$

Considérons la fonction ψ définie sur $[1;+\infty[$ par : $\psi(x)=F(x)-2\ln x$

La fonction ψ *est dérivable sur* $[1;+\infty[$ *comme somme de deux fonctions dérivables sur* $[1;+\infty[$ *,et pour tout* $x\in[1;+\infty[$ *; on a :* $\psi'(x)=F'(x)-\frac{2}{x}$

$$=f(x)-\frac{2}{x}$$

Comme $(\forall x\geq 1)$ *;* $f(x)\leq\frac{2}{x}$

Donc $(\forall x\geq 1)$ *;* $\psi'(x)\leq 0$

D'où la fonction ψ *est décroissante sur* $[1;+\infty[$ *et on a :* $(\forall x\geq 1)$ *;* $\psi(x)\leq\psi(1)$.

Par suite : $(\forall x\geq 1)$ *;* $F(x)-2\ln x\leq F(1)-2\ln 1$

D'où : $(\forall x\geq 1)$ *;* $\boxed{F(x)\leq F(1)+2\ln x}$

Conclusion

$(\forall x\geq 1)$ *;* $\boxed{G(x)\leq\frac{F(1)}{x}+2\times\frac{\ln x}{x}}$

b) On a : $(\forall x\geq 1)$ *;* $F'(x)=f(x)$ *et* $f(x)>0$

Donc F est croissante sur $[1;+\infty[$

D'où $(\forall x\geq 1)$ *;* $F(x)\geq F(1)$

Par Suite : $\frac{F(1)}{x}\leq\frac{F(x)}{x}\Rightarrow\frac{F(1)}{x}\leq G(x)$

En utilisant la question précédente on obtient : $(\forall x\geq 1)$ *;*

$$\frac{F(1)}{x}\leq G(x)\leq\frac{F(1)}{x}+2\times\frac{\ln x}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(1)}{x}+2\times\frac{\ln x}{x}=0$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$.

*D'après la question **II-3)** on a :* $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ *;* $G'(x)=\frac{f(x)-G(x)}{x}$

*et D'après le question **II-2) a)** on a :* $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ *;* $f(x)<G(x)$

Par Suite ; $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ *;* $G'(x)<0$

Donc G est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ *;*

Comme G est paire alors elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ *; d'où le tableau de variation de G.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0