

Série d'exercices 8 non corrigés « dérivabilité et étude de fonction »

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} , par : $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera
- 3) Construire dans le même repère les courbes C et C^{-1} la courbe de f^{-1} .

4) soit la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = f(\tan(x))$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

a) Montrer que g est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $g(x) = \cos(2x)$

c) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[-1; 1]$.

d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $] -1; 1[$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in] -1; 1[$.

e) Soit $G(x) = g^{-1}(-x) + g^{-1}(x)$ pour tout $x \in] -1; 1[$

Montrer que G est dérivable sur $[-1; 1]$ et précisera $G'(x)$

f) Montrer que $G(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1; 1]$

Que peut-on conclure pour $C_{g^{-1}}$?

Exercice 2

On donne la représentation graphique (C_f) , dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et continue sur \mathbb{R} telle que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$.

1) A l'aide d'une lecture graphique et avec justification:

a) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2}$ et

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)}{x+2}$.

b) Déterminer $f(-1)$, $f(1)$ et $f(2)$.

2) Dresser le tableau de variation de f

3) Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$g(x) = \begin{cases} f(2 \tan x) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

