BAC BLANC N° 50 — 2éme Bac PC-SVT

MATHÉMATIQUES 2020/2021

EXERCICE 1

Dans le plan complexe menu d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$;

$b=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$; $c=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ et $d=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $5z^2-8z+5=0$

a) Écrire d sous la forme trigonométrique.

b) En déduire que : $\arg\left(\frac{a}{b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $|a|=|b|$.

3) a) Vérifier que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

b) En déduire que OACB est un carré.

4) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)$

a) Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la translation T.

Vérifier que $z'=z+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

b) Vérifier que $c'=\frac{14}{5}d$ est l'affixe du point C' l'image de C par la translation T.

c)Montrer que : $(c')^{10}\in i\mathbb{R}$.

5) Montrer que l'ensemble des points $M(z)$ du plan tel que :

$\left|\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\left|\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

EXERCICE 2

Soient f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=2x+4+\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\ln(x+1)$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2cm).

1) a) Résoudre dans $]-1;+\infty[$ l'inéquation : $\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\ln(x+1)\le 0$

b) En déduire que pour tout x de $[0;3]$; $f(x)-(2x+4)\le 0$

2) a) Montrer que : $\int_0^3\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=2\ln^2(2)$ et $\int_0^3\frac{x}{x+1}dx=3-2\ln 2$

WWW.GUESSMATHS.CO

b) Montrer que $H: x \mapsto x-4\ln(x+1)$ est une primitive de $h: x \mapsto \dfrac{x-3}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$.

c) En utilisant l'intégration par parties montrer que :

$$\int_0^3 \left(\frac{x-3}{x+1}\right)\ln(x+1)\,dx = 8\ln 2 - 3 - 8\ln^2(2)$$

2) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite $(D): y = 2x+4$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=3$.

EXERCICE 3

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{5}U_n + \dfrac{6}{25} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le \dfrac{3}{5}$.

b) Montrer que (U_n) est croissante et déduire qu'elle est convergente.

2) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - \dfrac{3}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3}{5}$.

b) Déterminer V_n en fonction de n et en déduire U_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3 Calculer $S_n = U_0^2 + U_1^2 + \dots\dots\dots + U_{n-1}^2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

PROBLÈME

Partie I:

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)e^{x-1}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2) a) Montrer que $g'(x) = -\dfrac{1}{2}xe^{x-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire est strictement croissan

sur $]-\infty;0]$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

3- a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]\dfrac{3}{2};2\right[$.

b) En déduire que pour tout x de $]-\infty;\alpha]$ on a : $g(x) \ge 0$ et pour tout x de $[\alpha;+\infty[$ on a : $g(x) \le 0$.

Partie II:

WWW.GUESSMATHS.CO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{4x}{2+e^{x-1}}$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; puis interpréter géométriquement le résultat.

2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Montrer que (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;0]$ et (C_f) est au-dessous (D) sur $[0;+\infty[$.

3) a) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{8g(x)}{\left(2+e^{x-1}\right)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) En déduire que f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et f est décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que : $f(x)-x\geq 0$ pour tout x de $[0;1+\ln 2]$.

5) Tracer (C_f) et (D) dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$. (On prend : $\ln 2\simeq 0,7$; $\alpha\simeq 1,85$ et $f(\alpha)\simeq 1,7$

Partie III:

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases} \quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

1) Montrer que $0\leq U_n\leq 1+\ln 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2) Montrer que (U_n) est croissante ; puis déduire que (U_n) est convergente.

3) Calculer sa limite de (U_n).

WWW.GUESSMATHS.CO