Exercice 1

1\. a. Vérifier que : $\forall x \neq -1\ ;\ \frac{x^2}{1+x} = x-1+\frac{1}{1+x}$

b. Déduire que : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = -\frac{1}{2}+\ln 2$

2\. On pose: $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x}dx$

a. Montrer que : $I + J = \frac{1}{3}$

b. Déduire la valeur de J.

3\. En utilisant une intégration par parties ; calculer : $\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

Exercice 2

1\. a. Vérifier que: $\forall x \neq -1\ ;\ \frac{x}{1+x} = 1-\frac{1}{1+x}$

b. Montrer que : $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = 1-\ln 2$

c. Moyennant une intégration par parties ; montrer que : $\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln(2)-1$

2\. a. Vérifier que : $\forall x \neq -1\ ;\ \frac{x^3}{1+x} = x^2-x+1-\frac{1}{1+x}$

b. Montrer que : $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x}dx = \frac{5}{6}-\ln 2$.

c. Moyennant une intégration par parties ; montrer que : $\int_0^1 x^2\ln(1+x)dx = \frac{2}{3}\ln(2)-\frac{5}{18}$

Exercice 3

1\. a. Vérifier que: $\forall x \neq 0$ et $\forall x \neq -1\ ;\ \frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}$

b. Montrer que : $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}dx = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

2\. Moyennant une intégration par parties; calculer : $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

Exercice 4

On pose : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;-2\}\ ;\ f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$

1\. Vérifier que : $f(x) = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

2. Déduire que : $\int_0^1 f(x)\,dx = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

3. Montrer que: $\int_0^1 \frac{2x+4}{x^2+3x+2}\,dx = 2\ln(2)$

Exercice 5

1. Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$
2. En déduire la valeur de chacune des intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Exercice 6

On pose : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$; $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-3x+2}$

Déterminer les réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$

Montrer que : $\int_3^4 f(x)\,dx = \ln(6)$.

Exercice 7

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x)\,dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(x)\,dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx$

1. Calculer : $I-J$; $I+J+2K$ et $I+J-2K$
2. Déduire les valeurs respectives de I ; J et K.

Exercice 8 (Intégrales et ordre)

On pose : $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $I(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}\,dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{-t^3}{1+t}\,dt$

1. Calculer : $I(x)$ et $J(x)$

Déduire que : $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Exercice 9

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

1. Calculer : u_0 ; u_1 et u_2.

Moyennant une intégration par parties Montrer que : $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}$

3. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

4. a. montrer que : et déduire $\forall x \in [0;1]$; $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$

b. Déduire que : $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 10

On pose: $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = \int_0^1 (\tan(x))^n\, dx$.

1. Calculer : u_1 *et* u_3.

2. a. Montrer que: $\forall x \geq 2\ ;\ u_n + u_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$

b. calculer u_7

3. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{\pi}{4}$.

b. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

c. Déduire que la suite (u_n) *est convergente et calculer sa limite*