Devoir surveillé n° 2 B 2éme semestre **2éme Bac SM**

Exercice 01 : (5,5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :* $f_n(x) = x + n(1 + \ln x)$

1)- a)- *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

b)- *Montrer que* f_n *est une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$ *vers* $\mathbb{R}$.

2)- a)- *Montrer que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* α_n *dans* $\mathbb{R}^{*+}$ **;** *et que*

$$\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e} .$$

b)- *Montrer que :* $\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\right), f_{n+1}(x) < f_n(x)$. *Puis en déduire la monotonie de la suite* $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c)- *En déduire que la suite* $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est convergente , puis calculer sa limite .*

d)- *Prouver que* $\lim\limits_{n \to +\infty} n.\left(\frac{1}{e} - \alpha_n\right) = \frac{1}{e^2}$.

Exercice 02 : (5,5 points)

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x.\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$

1)- *Justifier que la fonction* f *est paire.*

2)- *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = \text{Arctan}(x)$.

3)- *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. *Puis montrer que* (C_f) *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche*
parabolique de direction une droite (Δ) *que l'on déterminera.*

4)- *Dresser le tableau de variation de* f .

5)- *Construire la courbe* (C_f) *dans un repère orthonormé.*

6)- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *On pose :* $S_n = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)$.

a)- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que pour tout* $k \in \{1, 2, ..., n\}$, *On a :*

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}.Arc\tan\left(\frac{k}{n}\right)\leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)$$

***b)**- En déduire que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), f(1)-f(0)\leq S_n\leq f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)$;

puis montrer que la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente en précisant sa limite.*

<u>Exercice 03</u> : (09 points)

I- Soit f *la fonction définie par :* $f(0)=0$ *et* $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2\ln x}}$, si $x>0$.

***1)**- Montrer que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right), 1+x^2\ln x>0$ *, Puis déduire* D_f .

***2)**- Montrer que* $\left(C_f\right)$ *admet au voisinage de* $+\infty$ *une asymptote horizontale que l'on déterminera.*

***3)- a)**- Montrer que* f *est continue et dérivable à droite en 0.*

***b)**- Montrer que :* $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right), f'(x)=\dfrac{2-x^2}{2\sqrt{\left(1+x^2\ln x\right)^3}}$.

***c)**- Dresser le tableau de variation de* f *en justifiant votre réponse.*

***4)**- Résoudre dans* $\mathbb{R}^+$ *l'équation* $f(x)=x$ *puis étudier le signe de* $f(x)-x$ *sur* $\mathbb{R}^+$.

***5)**- Construire la courbe* $\left(C_f\right)$ *dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

***6)**- Soit* g *la restriction de* f *à l'intervalle* $I=\left[0,\sqrt{2}\right]$.

***a)**- Montrer que* g *admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur un intervalle J que l'on déterminera.*

***b)**- Construire la courbe* $\left(C_{g^{-1}}\right)$ *dans le repère* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

II- On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_0=\frac{1}{2}$ *et* $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right), u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

***1)- a)**- Montrer que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right), 0<u_n<1$.

***b)**- Montrer que* $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone ; puis en déduire qu'elle est convergente.*

***c)**- Calculer la limite de* $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *en justifiant votre réponse.*

2)- a)- *Vérifier que :* $(\forall k\in\mathbb{N}),\dfrac{1}{u_{k+1}^{2}}-\dfrac{1}{u_{k}^{2}}=\ln(u_k)$.

b)- *En déduire la limite de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $(\forall n\in\mathbb{N}),v_n=\prod_{k=0}^{n}u_k$.

3)- *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *, On pose :* $S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{g^{-1}(u_k)}{k}$.

a)- *Montrer que :* $(\forall n\in\mathbb{N}^*),g^{-1}(u_{n+1}).\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}\leq S_n\leq g^{-1}(u_{2n}).\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}$.

b)- *Déduire la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *(On admet que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}=\ln 2$ *)* .

Correction

***Exercice 01* : (5,5 points)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :* $f_n(x) = x + n(1+\ln x)$

1)- a)- *On a :* • $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} x + n(1+\ln x) = -\infty$

(car $\lim_{x \to 0^+} (1+\ln x) = -\infty$ *et* $n > 0$*)*

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty}$

• $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} x + n(1+\ln x) = +\infty$.

(Car $\lim_{x \to +\infty} (1+\ln x) = +\infty$ *et* $n > 0$*)*

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty}$

b)- *Montrons que* f_n *est une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$ *vers* $\mathbb{R}$ *.*

Les fonctions $x \mapsto x$ *et* $x \mapsto n(1+\ln x)$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *; donc* f_n *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *(comme somme de deux fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}^{*+}$*) ; et on a pour tout*

$$x \in \mathbb{R}^{*+} : \ f_n'(x) = \left(x + n(1+\ln x)\right)'$$

$$= 1 + \frac{n}{x}$$

D'où $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)$ *;* $\boxed{f_n'(x) = 1 + \frac{n}{x}}$

Et $n \in \mathbb{N}$ *; donc* $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)$ *;* $f_n'(x) > 0$

Par suite f_n *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{*+}$

De plus f_n *est continue sur* $\mathbb{R}^{*+}$

Donc f_n *est une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$ *vers l'intervalle*

$$f_n\left(\mathbb{R}^{*+}\right) = \left]\lim_{x \to 0^+} f_n(x) ; \lim_{x \to +\infty} f_n(x)\right[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$

2)- a)- *Montrons que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* α_n *dans* $\mathbb{R}^{*+}$ ***; et que***

$\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$.

f_n *est une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$ *vers* $\mathbb{R}$ *et* $0 \in \mathbb{R}$ *; alors l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* α_n *dans* $\mathbb{R}^{*+}$ *; de plus on a :*

$f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} - n < 0$ *et* $f_n\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} > 0$ *; d'où :*

$$f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) < 0 < f_n\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{e^2}\right) < f_n(\alpha_n) < f_n\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e} \quad \text{(} f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\text{)}$$

Donc $\boxed{\frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$ *; on a :* $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 1 + \ln x$

et $0 < x < \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x < -1$

$\Rightarrow \ln x + 1 < 0$

Donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\forall x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$: $\boxed{f_{n+1}(x) < f_n(x)}$

On a : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[\right)$; $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1} \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$

Donc $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) < f_n(\alpha_{n+1})$ *et comme* $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$

Alors $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

D'où $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$ *(car* $f_n(\alpha_n) = 0$*)*

f_n *est une bijection strictement croissante sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *; donc sa bijection réciproque* f_n^{-1} *strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *; d'où :* $f_n^{-1}\left(f_n(\alpha_{n+1})\right) > f_n^{-1}\left(f_n(\alpha_n)\right)$

càd $\alpha_{n+1} > \alpha_n$

Conclusion : La suite (α_n) *est strictement croissante.*

c) La suite (α_n) *est strictement croissante ; majorée par* $\frac{1}{e}$ *donc elle est convergente.*

Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ $\left(\frac{1}{e^2} < \ell < \frac{1}{e}\right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n + n(1+\ln\alpha_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln\alpha_n = -1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = e^{-\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)}$$

On a ; $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right) = -1$; et comme la fonction exp est continue en -1 ; donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)} = \frac{1}{e}$

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{e}}$

d) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{e} - \alpha_n\right) = \frac{1}{e^2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $\frac{1}{e} - \alpha_n = \frac{1}{e} - e^{-\left(1+\frac{\alpha_n}{n}\right)}$

$$= \frac{1}{e}\left(1 - e^{-\frac{\alpha_n}{n}}\right)$$

$$= \frac{\alpha_n}{n} \times \frac{1}{e}\left(\frac{e^{-\frac{\alpha_n}{n}} - 1}{-\frac{\alpha_n}{n}}\right)$$

Donc $n\left(\frac{1}{e} - \alpha_n\right) = \frac{\alpha_n}{e}\left(\frac{e^{-\frac{\alpha_n}{n}} - 1}{-\frac{\alpha_n}{n}}\right)$; $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{\alpha_n}{n}\right) = 0$

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-\frac{\alpha_n}{n}}-1}{-\frac{\alpha_n}{n}}\right)=1$

D'autre part $\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{e}=\frac{1}{e^2}$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{e}-\alpha_n\right)=\frac{1}{e^2}}$

<u>Exercice 2</u>

$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)=x\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$

1) • $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ (-x\in\mathbb{R})$

• $f(-x)=-x\text{Arctan}(-x)-\frac{1}{2}\ln\left((-x)^2+1\right)$

$=x\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$

$=f(x)$

Donc f est une fonction paire.

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ *; on a :* $f'(x)=\left(x\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)'$

$$=\text{Arctan}(x)+x\times\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=\text{Arctan}(x)+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}$$

$$=\text{Arctan}(x)$$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \boxed{f'(x)=\text{Arctan}(x)}$

3) Pour tout $x>0$ *; on a :* • $f(x)=x\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$

$$=x\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x\text{Arctan}(x) - \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x\left(\text{Arctan}(x) - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{2x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(x\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$

D'autre part $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

D'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\text{Arctan}(x) - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{2x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\text{Arctan}(x) - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{2x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}}$

Soit $x > 0$ *; on a :* $0 < \text{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} < 0$

Et comme $\tan\left(\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(\text{Arctan}(x))}$

(On appliquera : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$*)*

Alors $\tan\left(\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{x}$

Par suite $\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} = \text{Arctan}\left(-\frac{1}{x}\right)$

$$= -\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-x\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

On pose $t=\frac{1}{x}$ *;* $x\to+\infty$ *alors* $t\to0^+$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{t\to0^+}\left(-\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\right)=-1$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)=-\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=-1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)=-\infty$ *)*

Conclusion : On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ *;* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}x\right)=-\infty$

Alors (C_f) *admet une branche parabolique de direction la droite* (Δ) *d'équation* $y=\frac{\pi}{2}x$ *au voisinage de* $+\infty$.

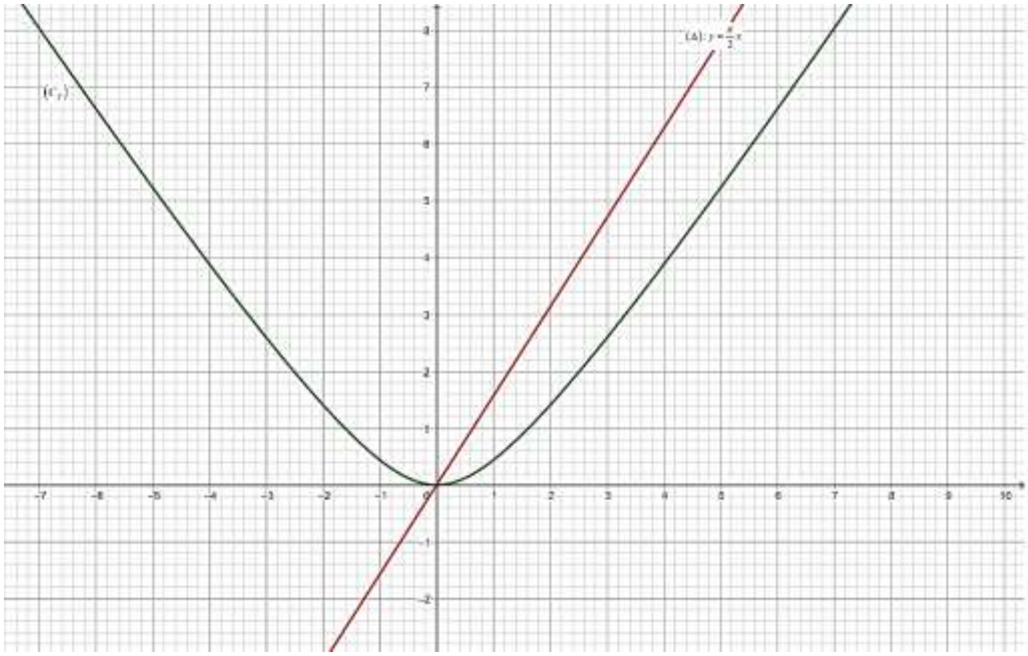
4) Comme f est paire alors :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $\mathrm{Arctan}(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *; d'où le tableau de variations de f :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) Construction de la courbe de f



6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *; on a :* $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k}{n}\right)$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in \{1;2;3;....;n\}$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f *sur l'intervalle*

$$\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right] \text{ ; on a : } \left(\exists c \in \left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[\right) / \; f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f'(c)$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{Arctan}(c)$$

Et comme $\dfrac{k}{n} < c < \dfrac{k+1}{n}$ *; la fonction* Arctan *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *; alors :*

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right) \leq \operatorname{Arctan}(c) \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

D'où $\dfrac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}\operatorname{Arctan}(c) \leq \dfrac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$

Donc $\dfrac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) - f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$

Par suite $\dfrac{1}{n}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

De la même manière en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f

sur l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]$ *; on obtient :* $f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\text{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)$

Conclusion : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ *et pour tout* $k\in\{1;2;3;....;n\}$

$$\boxed{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\text{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)\leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

b) $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ *et* $k\in\{1;2;3;....;n\}$

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\text{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)\leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En sommant les membres des n inégalités on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\leq S_n\leq\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Or : $\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$=f(1)-f(0)$$

Et $\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=2}^{n+1}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$=-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n+1}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ *;* $\boxed{f(1)-f(0)\leq S_n\leq f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)}$

On a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ *; de plus f est continue en* 0 *et en* 1 *donc :*

$$\lim_{n\to+\infty}f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)-f(0)$$

Et comme $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $f(1) - f(0) \leq S_n \leq f\left(1+\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$ *; alors* (S_n)*est convergente et sa limite est* $(f(1) - f(0))$

Or : $f(1) - f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ *; donc* $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}$

<u>Exercice 3</u>

I- $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2\ln x}} & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) La fonction $u : x \mapsto 1 + x^2 \ln x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *on a :*

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= x(2\ln x + 1) \end{aligned}$$

Et $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Et $u'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

<u>Tableau de variation de u</u>

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$u(x)$	‖	$\searrow$	$1-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	

On a : $u\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=1-\frac{1}{2e}$ *; comme* $2e>1 \Rightarrow u\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>0$

u admet une valeur minimale strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ *; donc :*

$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $u(x)>0$ *; d'où* $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $1+x^2\ln x>0$

De plus f est définie en 0 *; donc* $\boxed{D_f=\mathbb{R}_+^*}$

2) Pour tout $x>0$ *on a :* $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2\ln x}}$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2\ln x}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\ln x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\ln x}}$$

Et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\ln x\right)=+\infty$ *(car* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ *)*

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$

<u>Interprétation géométrique</u>

$\left(C_f\right)$ *admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de* $+\infty$.

3) a) On a : • $\lim_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)=0$ *; donc* $\lim_{x\to0^+}\sqrt{1+x^2\ln x}=1$

Alors $\lim_{x\to0^+}f(x)=0$ *et* $f(0)=0$

Donc f est continue à droite en 0.

• $\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2\ln x}}$ *et* $\lim_{x\to0^+}\sqrt{1+x^2\ln x}=1$

Donc $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$

D'où f est dérivable à droite en 0 *et* $f_d'(0)=1$

b) $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $f'(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2\ln x}}\right)'$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2\ln x}-x\times\dfrac{\left(1+x^2\ln x\right)'}{2\sqrt{1+x^2\ln x}}}{1+x^2\ln x}$$

$$=\frac{2\left(1+x^2\ln x\right)-x^2\left(1+2\ln x\right)}{2\sqrt{1+x^2\ln x}\left(1+x^2\ln x\right)}$$

$$=\frac{2+2x^2\ln x-x^2-2x^2\ln x}{2\sqrt{1+x^2\ln x}\left(1+x^2\ln x\right)}$$

$$=\frac{2-x^2}{2\sqrt{\left(1+x^2\ln x\right)^3}}$$

D'où : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)}{2\sqrt{\left(1+x^2\ln x\right)^3}}}$

Donc $f'(x)$ est du même signe que $\left(\sqrt{2}-x\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

<u>Tableau de variations de f</u>

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	0

On a : $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{1+\ln 2}}$

4) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$; on a : $f(x)-x=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2\ln x}}-1\right)$

$$= x\left(\frac{1-\sqrt{1+x^2\ln x}}{\sqrt{1+x^2\ln x}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\left(1-\sqrt{1+x^2\ln x}\right)\left(1+\sqrt{1+x^2\ln x}\right)}{\left(1+\sqrt{1+x^2\ln x}\right)\sqrt{1+x^2\ln x}}\right)$$

$$= x\left(\frac{1-\left(1+x^2\ln x\right)}{\left(1+\sqrt{1+x^2\ln x}\right)\sqrt{1+x^2\ln x}}\right)$$

$$= x\left(\frac{-x^2\ln x}{\left(1+\sqrt{1+x^2\ln x}\right)\sqrt{1+x^2\ln x}}\right)$$

$$= \left(\frac{x^3}{\left(1+\sqrt{1+x^2\ln x}\right)\sqrt{1+x^2\ln x}}\right)\times(-\ln x)$$

Comme $x > 0$ *; alors* $f(x) - x$ *est du même signe que* $(-\ln x)$ *; de plus*

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *et* $f(0) = 0$

Donc l'équation $f(x) = x$ *admet exactement deux solutions* 0 *et* 1.

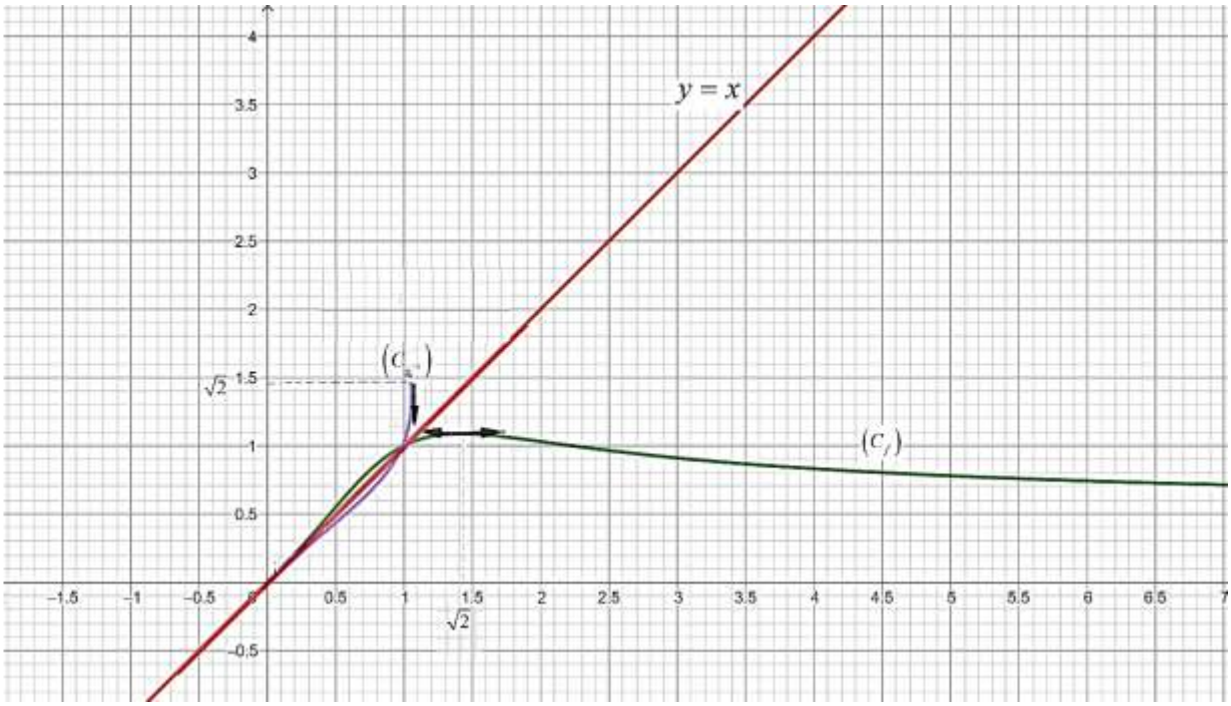
<u>Tableau de signe de</u> $\underline{\left(f(x) - x\right)}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	0	$+$	0	$-$	

Par suite : $\forall x \in]0;1[\;\; ; \; f(x) - x > 0$

$\forall x \in]1;+\infty[\;\; ; \; f(x) - x < 0$

5) Construction de $\left(C_f\right)$ *et 6) b) Construction de* $\left(C_{g^{-1}}\right)$



6) $\left(\forall x\in\left[0;\sqrt{2}\right]\right)$; $g(x)=f(x)$

a) f est continue strictement croissante sur $I=\left[0;\sqrt{2}\right]$;donc sa restriction g sur I est continue et strictement croissante sur I

D'où g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle :

$$J=g(I)=g\left(\left[0;\sqrt{2}\right]\right)=\left[g(0);g\left(\sqrt{2}\right)\right]=\left[0;\sqrt{\frac{2}{1+\ln 2}}\right]$$

II- $(u_n):\begin{cases}u_0=\dfrac{1}{2}\\ u_{n+1}=f(u_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

1) a) Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0<u_n<1$

- Pour $n=0$

$u_0=\dfrac{1}{2}$; donc $0<u_0<1$

- Soit $n\in\mathbb{N}$

Supposons que $0<u_n<1$ et montrons que $0<u_{n+1}<1$

On a : $0<u_n<1$ et f est strictement croissante sur $[0;1]$ (car $[0;1]\subset\left[0;\sqrt{2}\right]$)

Donc : $f(0)<f(u_n)<f(1)$ et $f(0)=0$; $f(1)=1$ et $f(u_n)=u_{n+1}$

D'où $0<u_{n+1}<1$

Conclusion : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad 0<u_n<1$

b) On a : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad 0<u_n<1$ *et* $\forall x\in\left]0;1\right[\quad ;\ f(x)-x>0$

Donc $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad f(u_n)-u_n>0$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>u_n$

On conclut que la suite (u_n) *est strictement croissante ; de plus elle est majorée par* 1

donc elle est convergente et sa limite ℓ *vérifie* $\frac{1}{2}\le\ell\le1$

(car $u_0=\frac{1}{2}$ *et* $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>u_0$ *)*

c) On a : • *f est continue sur* $[0;1]$

• $f([0;1])=[0;1]$

• $u_0\in[0;1]$

• $u_{n+1}=f(u_n)$

• *la suite* (u_n) *est convergente*

Donc la limite ℓ *est solution de l'équation* $f(x)=x$ *dans* $[0;1]$

Et comme $\frac{1}{2}\le\ell\le1$ *; alors* $\ell=1$

Par suite $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1}$

2) a) Pour tout $k\in\mathbb{N}$ *; on a :* $u_k>0$

$$\text{Et } u_{k+1}=f(u_k)\Leftrightarrow u_{k+1}=\frac{u_k}{\sqrt{1+u_k^{\,2}\ln u_k}}$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1}^{\,2}=\frac{u_k^{\,2}}{1+u_k^{\,2}\ln u_k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1}^{\,2}}=\frac{1+u_k^{\,2}\ln u_k}{u_k^{\,2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1}^{\,2}}=\frac{1}{u_k^{\,2}}+\ln u_k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1}^{\,2}}-\frac{1}{u_k^{\,2}}=\ln u_k$$

Donc : $(\forall k\in\mathbb{N})$; $\boxed{\dfrac{1}{{u_{k+1}}^2}-\dfrac{1}{{u_k}^2}=\ln u_k}$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; et $k\in\{0;1;2;.....;n\}$; on a :

$$\frac{1}{{u_{k+1}}^2}-\frac{1}{{u_k}^2}=\ln u_k$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u^2_{k+1}}-\frac{1}{u^2_{k}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\ln u_k \Leftrightarrow \frac{1}{u^2_{n+1}}-\frac{1}{u^2_{0}}=\ln\left(\prod_{k=0}^{n}u_k\right)$

$$\Leftrightarrow \ln(v_n)=\frac{1}{u^2_{n+1}}-\frac{1}{u^2_{0}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(v_n)=\frac{1}{{u_{n+1}}^2}-4$$

$$\Leftrightarrow v_n=e^{\left(\frac{1}{u^2_{n+1}}-4\right)}$$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\boxed{v_n=e^{\left(\frac{1}{u^2_{n+1}}-4\right)}}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{{u_{n+1}}^2}-4=-3$

La fonction exponentielle étant continue en -3 ; donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=e^{-3}}$

3) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $S_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{g^{-1}(u_k)}{k}$

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; pour tout $k\in\{0;1;2;.....;n\}$; on a : $u_{n+1}\le u_k\le u_{2n}$

(car (u_n) est croissante) et comme g est croissante sur $\left[0;\sqrt{2}\right]$ alors g^{-1} est

croissante sur $\left[0;\sqrt{\dfrac{2}{1+\ln 2}}\right]$; or $\left[0;\sqrt{\dfrac{2}{1+\ln 2}}\right]\subset[0;1]$; donc

$$g^{-1}(u_{n+1})\le g^{-1}(u_k)\le g^{-1}(u_{2n})$$

Par suite $\dfrac{g^{-1}(u_{n+1})}{k}\le\dfrac{g^{-1}(u_k)}{k}\le\dfrac{g^{-1}(u_{2n})}{k}$

En sommant les n membres des inégalités on obtient :

$$g^{-1}(u_{n+1})\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\le\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{g^{-1}(u_k)}{k}\le g^{-1}(u_{2n})\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

D'où $\boxed{g^{-1}(u_{n+1})\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\leq S_n\leq g^{-1}(u_{2n})\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}}$

b) on a : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$; $g^{-1}(u_{n+1})\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\leq S_n\leq g^{-1}(u_{2n})\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$

d'une part $\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=1$ et g^{-1} est continue en 1 ; donc :

$\lim_{n\to+\infty}g^{-1}(u_{n+1})=\lim_{n\to+\infty}g^{-1}(u_{2n})=g^{-1}(1)=1$ (car $g(1)=f(1)=1$)

D'autre part : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln 2$

Donc : $\lim_{n\to+\infty}\left(g^{-1}(u_{n+1})\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(g^{-1}(u_{2n})\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right)=\ln 2$

D'où la suite (S_n) est convergente et on a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\ln 2}$