EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LA FONCTION LOGARITHMIQUE
2éme Bac SC.ECO

Exercice 1:

Simplifier les expressions suivantes.

$A=\ln\left(3-\sqrt{3}\right)+\ln\left(3+\sqrt{3}\right)$; $B=\ln e^{3}-\ln\dfrac{2}{e}+\ln 2$;

$C=3\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 9-2\ln\left(2\sqrt{6}\right)$.

Exercice 2:

Résolvez dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes.*

1) $\ln x+\ln(3x+2)=\ln(2x+3)$

2) $\ln(x-3)+\ln(x+1)=\ln(x+7)$

3) $4(\ln x)^{2}-4\ln x-3=0$

Exercice 3:

Résolvez dans $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes.*

1) $\ln(x-3)-\ln(x+1)\leq 0$

2) $4(\ln x)^{2}-4\ln x-3\leq 0$

Exercice 4:

*Déterminer le domaine de définition de la fonction **f**.*

1) $f(x)=(\ln x-2)\sqrt{4-x}$

2) $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$

3) $f(x)=\dfrac{2x}{1-\ln x}$

Exercice 5:

Calculez les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+3)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(x^{2}+4x\right)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+2)\ln x}{x^{2}-1}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$
- $\lim\limits_{x\to 0^{+}} x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$

Exercice 6:

Démontrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ *; et explicitez* $f'(x)$ *dans chacun des cas suivants :*

1) $f(x)=x^{2}(2\ln x-1)$

2) $f(x)=\ln\sqrt{1+4x+x^{2}}$

3) $f(x)=\dfrac{x^{2}\ln x}{1+x}$

4) $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^{2}\right)}{x}$

Exercice 7:

*la fonction **f** définie sur* $[1;+\infty[$ *, par :*

$f(x)=x\sqrt{\ln x}$

On désigne par (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *du plan.*

1) *Montrer que f est continue sur* $[1;+\infty[$.

2) a) *Etudier la dérivabilité de **f** à droite en* 1 *; et Interpréter géométriquement le résultat trouvé.*

b) *Dresser le tableau de variation de f.*

3) a) *Déterminer l'intersection de* $(\Delta):y=x$ *et* (C_f) .

b) *Tracer* (C_f) *et* (Δ) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) a) *Montrer que **f** admet une fonction réciproque g définie sur* $[0;+\infty[$.

b) *Tracer la courbe* (C_g) *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) *On considère la suite* (u_n) *définie par :*

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

a) *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on a :* $0\leq u_n\leq e$.

b) *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

c) *En déduire que* (u_n) *est convergente et trouver sa limite.*

Exercice 8:

***Partie1** :*

*Soit **g** la fonction définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :*

$g(x)=\dfrac{2x}{x+1}-\ln(1+x)$.

1) *Dresser le tableau de variation de **g**.*

2) *Montrer que l'équation* $g(x)=0$ *admet dans l'intervalle* $]-1;+\infty[$ *deux solutions* 0 *et* α *; puis vérifier que :* $3.8<\alpha<4$.

3) *En déduire le signe de* $g(x)$ *pour tout* $x\in]-1;+\infty[$

4) *Montrer que pour tout* $x\in]-1;+\infty[$ *, on a :*

$g(x)\le 1$

Partie2 :

Soit ***f*** *la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :*

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}.$$

On désigne par (C_f) *la courbe représentative de* ***f*** *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *du plan.*

1) *Montrer que* ***f*** *est continue sur* $[0;+\infty[$.

2) *Etudier la dérivabilité de* ***f*** *à droite en* 0.

3) *Montrer que :* $(\forall x>0)$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

4) *Dresser le tableau de variation de* ***f***

5) *vérifier que :* $f(\alpha)=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

6) *Tracer la courbe* (C_f) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

<u>Exercice 9</u>:

Déterminer une primitive ***F*** *de la fonction* ***f*** *sur* ***I***.

1) $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$ **;** $I=\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

2) $f(x)=\dfrac{4x-2}{x^2-x+1}$ **;** $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ **;** $I=]1;+\infty[$.

4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **;** $I=]0;+\infty[$

5) $f(x)=\tan x$ **;** $I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

<u>Exercice 10</u>:

Partie A:

Soit ***g*** *une fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$g(x)=x^3-x-2\ln(x)+1$

1) *Montrer que pour tout* ***x*** *de* $]0;+\infty[$ *on a :*

$$g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) *Etudier les variations de la fonction* ***g*** *puis déterminer le signe de* $g(x)$**.**

Partie B:

Soit ***f*** *une fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}$ *et* (C_f) *désigne la représentation graphique de la fonction* ***f*** *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ ***(****unité* 2 cm***)*** **.**

1) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) *Calculer* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, *et interpréter graphiquement.*

3) *Montrer que :* $(\forall x>0)$**;** $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$, *puis donner le tableau de variation de* ***f****.*

4) *Vérifier que la droite* (Δ) *d'équation* $y=x$ *est asymptote oblique à* (C_f) *en* $+\infty$.

5) *Soit h la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$h(x)=x+\ln x$

a) *Montrer que l'équation* $h(x)=0$ *admet une solution unique* α *sur l'intervalle* $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

Et vérifier que : $e^{-\alpha}=\alpha$ **.**

b) *Etudier la position relative de* (C_f) *et* (Δ).

6) *Construire* (C_f) *et* (Δ) *dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$

<u>Exercice 10:</u>

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

g *est la fonction définie sur* $[0;+\infty[$ *par :*

$$g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(1+x^2)$$

1) *Démontrer que l'équation* $g(x)=0$ *admet une solution unique* α *sur l'intervalle* $]1;+\infty[$.

2) *Préciser le signe de* $g(x)$ *sur l'intervalle* $[0;+\infty[$ **.**

Partie B : Etude d'une fonction.

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *par :*

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & si\ \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) *Montrer que* ***f*** *est continue à droite en* ***0****.*

2) *Calculer* $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$, *et interpréter géométriquement le résultat trouvé.*

3) *a)* *Vérifier que:* $(\forall x>0)$;

$$f(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; et interpréter le résultat trouvé géométriquement.

4) a) Démontrer que $(\forall x>0)$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire les variations de f.

5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 11:

Partie A:

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x)=x+(x-2)\ln(x)$

a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $g'(x)=2\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x$

b) Etudier les variations de g. Puis en déduire que la fonction g est strictement positive.

Partie B:

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$ et (C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité 2 cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.

3) a) Vérifier que $(\forall x>0)$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$, et étudier les variations de f.

b) En déduire que **f** admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

4) a- Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b- Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x-1-\ln x$.

En déduire le signe de $h(x)$.

c- Montrer que: $f(x)-x=(\ln x-1)h(x)$;et en déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à (T).

5) Tracer les courbes (C_f) ; $(C_{f^{-1}})$ et la tangente (T) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$