Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}$ *et soit* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Déterminer D domaine de définition de f et vérifier que f est impaire.

2/ Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to0^+} f(x)$ *et donner l'interprétation géométrique des résultats détenues.*

3/ Montrer que : $(\forall x\in D)\quad f'(x)=\frac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

4/ Construire dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ (C_f).

5/ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} *définie sur un intervalle J à déterminer.*

b- Montrer que g^{-1} *est dérivable sur J.*

c- Construire la courbe de g^{-1} *sur le même repère* $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Correction de l'exercice 2 :

$f(x)=\frac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}$

1/ $\bullet\, x\in D\Leftrightarrow x^3\neq0$

Puisque $(\forall x\in IR)\Leftrightarrow x\neq0$ *D'où* $D=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

Vérifions que f est impaire :

$\bullet$ On a $\forall x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\Rightarrow(-x)\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

Et $f(-x)=\frac{2(-x)^2-1}{(-x)^3}\sqrt{1+(-x)^2}$

$=-\frac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}$

$=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

2/ On a : $\forall x>0\ f(x)=\frac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

$$=\frac{2x^2-1}{x^3}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \quad \left(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\right)$

Calculons $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

On a : • $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x^2-1}{x^3}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{1+x^2}=1$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

Interprétation géométrique :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ *: signifie que la courbe admet une asymptote horizontale d'équation* $y=2$ *au voisinage de* $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ *: signifie que la courbe admet une asymptote verticale d'équation* $x=0\left(\text{l'axe } O_y\right)$ *au voisinage de* $-\infty$.

3/ on a : $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}$ *la fonction* $x\to\frac{2x^2-1}{x^3}$ *est dérivable sur* IR^* .

Donc la fonction f est dérivable sur D et on a :

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\sqrt{1+x^2}\right)' \quad (\forall x\in D)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)'\sqrt{1+x^2}+\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)' \quad (\forall x\in D)$$

On a : $\left(\dfrac{2x^2-1}{x^3}\right)' = \dfrac{4x.x^3-(2x^2-1)\times 3x^2}{x^6}$

$$= \frac{4x^4-6x^4+3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{4x^4-6x^4+3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-2x^4+3x^2}{x^6} = \frac{-2x^2+3}{x^4}$$

Et : $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D'où : $f'(x) = \dfrac{-2x^2+3}{x^4}\sqrt{1+x^2} + \dfrac{2x^2-1}{x^3}\times\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

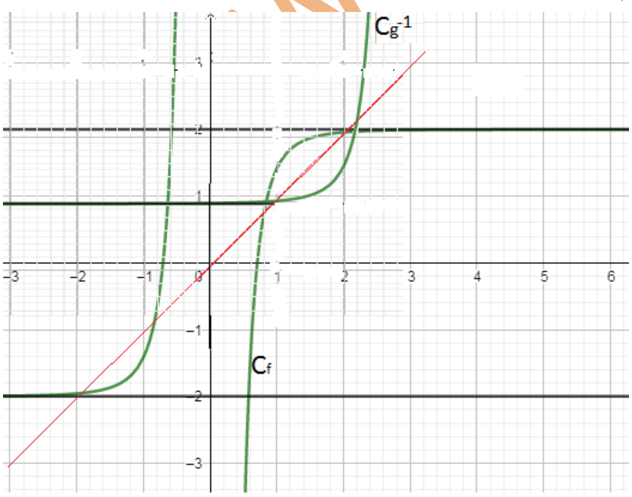
$$= \frac{(-2x^2+3)\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+(2x^2-1)x^2}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{(-2x^2+3)(1+x^2)+2x^4-x^2}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{-\cancel{2x^2}+3-\cancel{2x^4}+\cancel{3x^2}+\cancel{2x^4}-\cancel{x^2}}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

Donc : $(\forall x\in D)\ f'(x) = \dfrac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

4/ Construction de (C_f) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.



5/ a- g la restriction de f sur $\left]0,+\infty\right[$.

Donc g est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$ *d'où g admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur l'intervalle.*

$$J = f\left(\left]0,+\infty\right[\right) = \left]\lim_{x\to 0^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]-\infty; 2\right[$$

b- On a $f'(x) = \dfrac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ *sur D donc* $g'(x) = \dfrac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ *sur* $\left]0,+\infty\right[$.

$$\Rightarrow \left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right)\ g'(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow g^{-1} \text{ est dérivable sur } J$$

c- Construction de la courbe de g^{-1}

Voir graphique de la courbe de f question 4-