



Fonction exponentielle

A) Définition et premières conséquences.

Théorème et définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
 Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée $\exp$.

Conséquences

- La fonction $\exp$ est définie dans $\mathbb{R}$, dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x , $\exp(x) > 0$ (voir démonstration).

B) Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle caractéristique

Pour tous réels a et b , $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$

Conséquences

Pour tous réels a et b , et tout entier relatif n ,

$\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$	$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$	$\exp(na) = (\exp(a))^n$
--------------------------------	---------------------------------------	--------------------------

C) Nombre e . Notation e^x .

- Le nombre $\exp(1)$ est noté e et on a : $e \approx 2,718$

En prenant $a=1$ la dernière relation donne : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exp(n) = e^n$

- Pour tout réel x , on note $\exp(x) = e^x$

Ainsi, les propriétés précédemment établies s'écrivent maintenant : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Pour tout réel x , $e^x > 0$

Pour tous réels a et b , et tout entier relatif n

$$\begin{aligned} e^{a+b} &= e^a \times e^b \\ e^{-b} &= \frac{1}{e^b} \\ e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b} \\ e^{na} &= (e^a)^n \end{aligned}$$

D) Equation différentielle $y' = ay$ (a réel non nul)

Théorème

Soit a un réel donné.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f définies dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = k e^{ax}$ où k est un réel quelconque.

Pour tout couple (x_0, y_0) de réels donnés, cette équation admet une et une seule solution f telle que $f(x_0) = y_0$.

E) Variations et courbe de la fonction $x \mapsto e^x$.

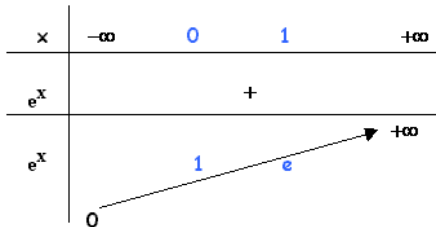
1- La fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$

2- La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\exp'(x) = e^x}$

Or $e^x > 0$ pour tout réel x donc la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3- $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty}$

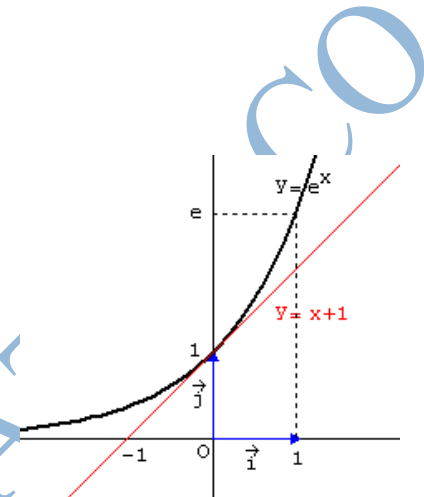
4- T.D.V



5- Courbe représentative ($C_{\exp}$)

- l'axe des abscisses est asymptote à ($C_{\exp}$) en $-\infty$.

- La fonction $x \mapsto x+1$ est la meilleure approximation affine de la fonction $\exp$ au voisinage de 0.



F) Equations et inéquations.

• La fonction $\exp$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
pour tous réels a et b :

$$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

G) Des limites à connaître.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

H) Croissances comparées des fonctions exponentielle et puissance.

Théorème

Pour tout entier strictement positif n ,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

et

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0}$$

« à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x »

I) Fonction composée $\exp \circ u$.

Dérivée de $\exp \circ u$

Théorème :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée e^u est dérivable sur I et :

$$\boxed{(e^u)' = u' e^u}$$

Primitive de $u' e^u$

Théorème : si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors

$\boxed{\text{une primitive de } u' e^u \text{ sur } I \text{ est } e^u}$

J) Equation différentielle $y' = a y + b$ (a réel non nul, b réel)

Théorème

Soit a et b des réels donnés, avec $a \neq 0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = a y + b$ sont les

fonctions f définies dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = k e^{a x} - \frac{b}{a}$ où k est un réel quelconque.

Pour tout couple (x_0, y_0) de réels donnés, cette équation admet une et une seule solution f telle que $f(x_0) = y_0$

WWW.GUESSMATHS.CO