

**Exercice 1: (3 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère les points:  $A(1;1;1)$ ;  $B(1;2;3)$  et  $C(2;1;-1)$ .

1/ a/ Montrer que :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

b/ Dédurre que  $2x - 2y + z - 1 = 0$  est l'équation cartésienne du plan  $(ABC)$

2/ On considère la sphère  $(S)$  d'équation cartésienne:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 5 = 0$

Vérifie que la sphère  $(S)$  a pour centre le point  $\Omega(1; -3; 2)$  et pour rayon  $R = 3$ .

3/ Soit  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(ABC)$

a/ Montrer que: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 est une représentation paramétrique de la

droite  $(\Delta)$ .

b/ Montrer que la droite  $(\Delta)$  coupe la sphère  $(S)$  en deux points:  $I(3; -5; 3)$  et  $J(-1; -1; 1)$

**Exercice 2: (3 points)**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases} \quad ; \text{ pour tous } n \in \mathbb{N}^*.$$

1/ Montrer par récurrence que :  $u_n > 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

2/ On considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a/ Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison 1.

b/ Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c/ Dédurre que :  $u_n = 2 + \frac{3}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

d/ Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice 3 (3 points)**

1/ a/ Résoudre dans L'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(z - 1 - i)(z^2 + 2z + 10) = 0$

b/ On pose  $a = 1 + i$ .

Ecrire  $a$  sous la forme trigonométrique.

c/ En déduire que :  $a^{16} - 256 = 0$

2/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points A et B et C d'affixes respectives :  $a = 1 + i$  ;  $b = -1 + 3i$  et  $c = -3 + i$

a/ Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R de centre B et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$

b/ En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B

3/ Montrer que :  $(-1 + 3i)(-3 + i) = -10i$  puis en déduire que  $OB \times OC = 10$

4/ Soit le point D tel que  $DC = AB$  et le point P le milieu du segment  $[BC]$ .

a/ Montrer que l'affixe du point D est :  $d = -1 - i$

b/ Montrer que l'affixe du point P est :  $p = -2 + 2i$

c/ Soit le point H d'affixe  $h = 1 + 5i$ . Montrer que :  $\frac{p - a}{d - h} = -\frac{1}{2}i$

d/ En déduire que les droites (AP) et (DH) sont perpendiculaires et que  $DH = 2AP$

#### **Exercice 4: (3 points)**

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher:

5 boules blanches portant les nombres : 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2

3 boules vertes portant les nombres : 1 ; 1 ; 1

2 boules rouges portant les nombres : 1 ; 2

On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants:

A : Obtenir deux boules blanches et une rouge.

B : Obtenir trois boules distincts deux à deux

C : La somme de numéro des boules tirées est paire.

1/ Montrer que :  $p(A) = \frac{1}{6}$  ;  $p(B) = \frac{1}{4}$  et  $p(C) = \frac{8}{15}$

2/ a/ Montrer que :  $p(B \cap C) = \frac{1}{20}$  et calculer  $p(\overline{B \cup C})$

b/ Les événements B et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3/ Sachant que l'événement C est réalisé, calculer la probabilité d'obtenir trois boules distincts deux à deux.

#### **Exercice 5: (8 points)**

I- On considère la fonction g définie sur par :  $g(x) = 1 - e^{2x} + 2xe^{2x}$

1/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2/ a/ Calculer  $g'(x)$  pour tout x de  $\mathbb{R}$

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction g

3/ En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$

II/ On considère la fonction numérique f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - (1 - x)e^{2x}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité 1cm)

1/ a/ Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b/ Montrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x$  est une asymptote oblique à la courbe (C) au

voisinage de  $-\infty$ .

c/ Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite ( $\Delta$ )

2/ calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter le résultat graphiquement.

3/ a/ Montrer que :  $f'(x) = g(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

b/ Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$

4/ Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $\mathbb{R}$  et que :  $\ln(2) < a < 1$ .

5/ Calculer  $f''(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis déterminer le point d'inflexion de la courbe (C)

6/ Tracer la courbe (C)

7/ a/ A l'aide d'une intégration par parties montrer que :  $\int_{\ln(2)}^1 x e^{2x} dx = \frac{e^x + 4 - 4 \ln(4)}{4}$

b/ Calculer en  $\text{cm}^2$  la surface  $A$  du domaine limité par la courbe (C) et la droite ( $\Delta$ ) et les droites  $x=1$  et  $x=e$

**III/** Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [1; +\infty[$

1/ Montrer que  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

2/ Vérifier que  $h(1) = 1$  et calculer  $(h^{-1})'(1)$

3/ Tracer dans le même repère la courbe  $(C_{h^{-1}})$  représentative de la fonction  $h^{-1}$ .