

Exercice 1 : (04 points)

Soient x et y deux nombres relatifs.

Calculer les restes de la division euclidienne de $x^2 + y^2$ par 4 .

Exercice 2 : (05 points)

Soit $a = 999$ et $b = 123$

- 1) Calculer le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b .
- 2) Calculer le pgcd ($a ; b$).
- 3) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = d$ où $d = \text{pgcd}(a ; b)$.
- 4) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $au + bv = 3d$.

Exercice 3 : (11 points)

- 1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $29x - 36y = 1$.
 - a) Vérifier que le couple (5;4) est une solution particulière de l'équation (E).
 - b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
- 2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $2x^{36} - x^{29} - 1 \equiv 0[52]$.
Soit x solution de (F).
 - a) Montrer que : $x \wedge 13 = 1$; en déduire que : $x^{12} \equiv 1[13]$
 - b) Montrer que : $x^{36} \equiv 1[13]$; en déduire que : $x^{29} \equiv 1[13]$
 - c) En utilisant la question 1) ; montrer que $x \equiv 1[13]$
 - d) Montrer que : $x \wedge 4 = 1$; en déduire que : $x \equiv 1[4]$
 - e) Montrer que : $x \equiv 1[52]$
- 3) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F).