guessmaths

Examen nationale 2009 Session de Rattrapage

2éme Bac SM A et B

Exercice 1 : (3 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'élément neutre $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ est un espace vectoriel réel.

Soit $V=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0.75 1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ dont on déterminera une base.

0.25 2) a) Montrer que V est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.5 b) Montrer que $(V,+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif.

0.25 3) a) Calculer $M_{\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)}$

0.25 b) L'anneau $(V,+,\times)$ est-il un corps.

4) Soit X un élément de V tel que : $X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2$

0.5 a) Montrer que : $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=O$ où O est la matrice nulle.

0.5 b) On suppose que $a^2-4b^2\neq 0$

Montrer que la matrice X admet un inverse à déterminer.

Exercice 2 : (4 points)

Soit u un nombre complexe différent de $(1-i)$

0.25 1) a) Développer $(iu-1-i)^2$

0.75 b) Résoudre dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$$

2) Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A, B, U et Ω dont les affixes sont respectivement $a=(1+i)u-2i$; $b=(1-i)u+2$; u et $\omega=2-2i$

0.5 a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[AB]$; puis déterminer le vecteur de la translation t qui transforme le point U au point I.

0.5 b) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; montrer que $R(A)=B$

0.5 c) Déduire que (ΩI) et (AB) sont perpendiculaires.

0.75 d) A partir du point U donner une méthode pour construire les points A et B.

3) On pose : $u=\alpha(1+i)-2i$; où $(\alpha \in \mathbb{R})$

0.5 a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de α.

0.25 b) Déduire que les points A ; B et U sont alignés.

Exercice 3 : (3 points)

Soit n un entier naturel tel que : $n \geq 4$

On a trois caisses U_1 ; U_2 et U_3

La caisse U_1 contient une seule boule Rouge et $(n-1)$ boules Noires.

La caisse U_2 contient deux boules Rouges et $(n-2)$ boules Noires.

La caisse U_3 contient trois boules Rouges et $(n-3)$ boules Noires.

On considère l'expérience aléatoire suivante : On choisit aléatoirement l'un des trois caisses puis on tire simultanément deux boules de la caisse choisie.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules Rouges tirées.

0.25 1- Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

0.75 2- a) Montrer que la probabilité de l'événement $(X=2)$ est égale à $\dfrac{8}{3n(n-1)}$

0.75 b) Montrer que la probabilité de l'événement $(X=1)$ est égale à $\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

0.5 c) Déduire la loi de la variable aléatoire X.

0.75 3- Sachant qu'on a obtenue deux boules Rouges ; qu'elle est la probabilité pour que le tirage soit effectué de la caisse U_3.

Problème : (10 points)

I- On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

0.5 1) a) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

0.5 b) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

0.5 2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]\ln 4, \ln 6[$ (on prend $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$)

0.5 b) Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

3) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\left(1-e^{-u_n}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1 \le u_n \le \alpha$

0.25 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

0.25 d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calcule sa limite.

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x^2}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

0.5 2) a) Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

0.75 b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$; on a : $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{x^3}$

0.5 3) Construire la courbe (C) dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prend $\alpha \simeq 1{,}5$)

III- On considère la fonction numérique F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(0) = -\ln 2 \\ F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}\,dt \quad (\forall x > 0) \end{cases}$$

0.5 1) a) En utilisant une intégration par parties montrer que pour tout $x>0$; on a :

$$F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x>0)$; $e^x \ln 2 \le \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \le e^{2x}\ln 2$

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$; puis déduire que la fonction F est continue à droite en 0

0.25 2) a) montrer que pour tout $x>0$; $F(x) \le \dfrac{1-e^x}{2x}$

0.25 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0.5 3) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$; on a :

$$F'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

0.75 4) a) Soit $x \in]0,+\infty[$.

Montrer qu'il existe $c \in]0,x[$; tel que : $F(x)-F(0) = -\frac{1}{2}xe^{2c}$

(On peut utiliser le théorème des accroissements finis deux fois)

0.25 b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $-\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$

0.25 c) Déduire que F est dérivable à droite en 0 et que : $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$