Correction Examen National 2014 session normale 2éme Bac S M

Exercice 1

1) On sait que 31 est premier car il n'est divisible par aucun des nombres premiers dont le carré est inférieur à 31 (càd. 2 ; 3; 5).
De même pour 331 il n'est pas divisible par les nombres premiers (2; 3; 5; 7; 11; 13 et 17); donc a_1 et a_2 sont premiers

2) pour tout $n\in\mathbb{N}$; on a :

$$a_n = \underbrace{33\ldots31}_{\text{n fois}}$$
$$=1+3\times10+3\times10^2+.....+3\times10^n$$
$$=1+3\times10\left(1+10^2+.....+10^{n-1}\right)$$
$$=1+3\times10\times\frac{1-10^n}{1-10}$$
$$=1+3\times\frac{10^{n+1}-10}{9}$$
$$=1+\frac{10^{n+1}-10}{3}$$
$$=\frac{3+10^{n+1}-10}{3}$$
$$=\frac{10^{n+1}-7}{3}$$

Donc : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\boxed{3a_n+7=10^{n+1}}$.

Remarque : On peut aussi faire une démonstration par récurrence

3) soit $k\in\mathbb{N}$;
On a 31 est premier positif et 31 ne divise pas 10 ; donc $31\wedge10=1$.
D'après le théorème de Fermat : $10^{31-1}\equiv1[31]$, soit $10^{30}\equiv1[31]$
Donc $10^{30k}\equiv1[31]$, par suite $10^{30k+2}\equiv10^2[31]$ **(1)**
Or $10^2\equiv7[31]$ **(2)**
De **(1)** et **(2)** on déduit que : $(\forall k\in\mathbb{N})$; $\boxed{10^{30k+2}\equiv7[31]}$

4) On a $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $3a_n+7=10^{n+1}$
Donc pour tout $k\in\mathbb{N}$; on a $30k+1\in\mathbb{N}^*$, par suite : $3a_{30k+1}+7=10^{30k+1+1}$
et on a : $10^{30k+2}\equiv7[31]$, donc : $3a_{30k+1}+7\equiv7[31]$
par suite : $(\forall k\in\mathbb{N})$; $\boxed{3a_{30k+1}\equiv0[31]}$.

5) Supposons que $n\equiv1[30]$
Montrons que l'équation : (E): $a_nx+31y=1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$
Supposons que l'équation (E) admet une solution $(x_0;y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$.
On a $n\equiv1[30]$, alors $n=1+30k$ où $k\in\mathbb{N}$

www.GUESSMATHS.CO

Or, d'après la question (4+++), on a $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$, alors 31 divise $3a_{30k+1}$
Et comme 31 et 3 sont deux nombres premiers distincts, alors $31 \wedge 3 = 1$
Et d'après le théorème de Gauss 31 divise a_{30k+1}
Alors 31 divise $a_{30k+1}x_0 + 31y_0$.
Or $(x_0;y_0)$ est solution de (E), alors $a_{30k+1}x_0 + 31y_0 = 1$.
Donc : 31 divise 1 , ce qui est absurde.
Conclusion
(E) n'admet pas de solution.

Exercice 2 :
- $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $M(a;b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et soit $E = \{M(a,b)/(a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

1- Montrons que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$.

On a : ► $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $E \neq \varnothing$ $(\text{car } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M(0;0) \in E)$

► Soient $M(a;b) \in E$ et $M(a';b')$ deux éléments de (E) :

$$M(a;b) - M(a';b') = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & a'-b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-a' & (a-a')-(b-b') \\ b-b' & (a-a')+(b-b') \end{pmatrix}$$
$$= M(a-a';b-b')$$

Donc $M(a;b) - M(a';b') \in E$

Conclusion.
$(E;+)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$.

2- Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Or $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin E$, car si a=1 et b=0 alors $a-b = 1 \neq 2$

Donc $(\exists J \in E)/\ J \times J \notin E$; par suite E n'est pas stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

3- la loi $*$ définie par :

Pour tout A ; B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $A * B = A \times N \times B$; avec $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et φ : $\begin{matrix} \mathbb{C}^* \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ a+ib \mapsto M(a;b) \end{matrix}$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

a) Soit $z = a+ib$ et $z = a+ib$ dans $\mathbb{C}^*$

On a : $\varphi(z)*\varphi(z')=\varphi(a+ib)*\varphi(a'+ib')$

$=M(a;b)*M(a';b')$

$=\begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a' & a'-b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & -a+a-b \\ b & -b+a+b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a' & a'-b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a' & a'-b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} aa'-bb' & a(a'-b')-b(a'+b') \\ ba'+ab' & b(a'-b')+a(a'+b') \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} aa'-bb' & (aa'-bb')-(ab'+a'b) \\ ab'+a'b & (aa'-bb')+(ab'+a'b) \end{pmatrix}$

$=M(aa'-bb';ab'+a'b)$

D'autre part :

$\varphi(z\times z')=\varphi((a+ib)\times(a'+ib'))$

$=\varphi((aa'-bb')+i(ab'+a'b))$

$=M(aa'-bb';ab'+a'b)$

D'où : $\left(\forall((a;b);(a';b'))\in(\mathbb{R}^2-\{(0;0)\})^2\right)$

$\varphi(z)*\varphi(z')=\varphi(z\times z')$

Conclusion : φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});*)$.

b) On a : $\varphi(\mathbb{C}^*)=\{\varphi(z)\ /\ z\in\mathbb{C}^*\}$, donc :

$\varphi(\mathbb{C}^*)=\{M(a,b)\ /(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\}$

$=\{M(a,b)\ /\ M(a,b)\neq M(0,0)\}$

$=E-\{O\}$

Alors : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

c) On sait que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif

On a φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*;\times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});*)$ et $(\mathbb{C}^*;\times)$ est un groupe commutatif.

Alors $(\varphi(\mathbb{C}^*);*)$ est un groupe commutatif .

Et comme $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$; alors $(E^*;*)$ est un groupe commutatif.

4) Soient A ; B et C dans E; on a :

$A*(B+C)=A\times N\times(B+C)$

$=A\times(N\times B+N\times C)$ (car $\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

$=A\times N\times B+A\times N\times C$

$=A*B+A*C$

5) D'après ce qui précède , on a :

- $(E;+)$ est un groupe commutatif d'élément neutre O .

www.guessmaths.co

• $(E^*;*)$ est un groupe commutatif

• $A*(B+C)=(A*B)+(A*C)$, et $*$ est commutative dans E, alors $(B+C)*A=(B*A)+(C*A)$

Donc la loi ''$*$'' est distributive par rapport ă la loi ''+'' dans E .

On en déduit que $(E;+;*)$ est un corps commutatif.

Exercice 3

1) Soit $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ et l'équation dans $\mathbb{C}$, (E): $z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

a) $\Delta=\left(-\sqrt{2}e^{i\theta}\right)^2-4e^{2i\theta}$

$=2e^{2i\theta}-4e^{2i\theta}$

$=-2e^{2i\theta}$

$=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$

b) On a : •) $z_1=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\theta}+\sqrt{2}ie^{i\theta}}{2}$

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\theta}$

$=e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}$

$=e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

•) $z_2=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\theta}-\sqrt{2}ie^{i\theta}}{2}$

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{i\theta}$

$=e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}$

$=e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\boxed{z_1=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ et $\boxed{z_2=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

2) $I(1)$; $J(-1)$; $T_1\left(e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$; $T_2\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$ et $A\left(\sqrt{2}e^{i\theta}\right)$

a) Calculons $\dfrac{z_{T_1}-z_{T_2}}{z_A-z_O}$

► $\dfrac{z_{T_1}-z_{T_2}}{z_A-z_O}=\dfrac{e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\,\theta}}$

$=\dfrac{\left(e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\right)e^{-i\,\theta}}{\sqrt{2}}$

W W W . G U E S S M A T H S . C O

$$= \frac{\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times 2i \sin\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times 2i \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = i$$

Donc : $\frac{z_{T_1} - z_{T_2}}{z_A - z_O} = i$

D'où : $\arg\left(\frac{z_{T_1} - z_{T_2}}{z_A - z_O}\right) \equiv \left(\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$ alors $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{T_2T_1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Par suite les droites et (OA) sont perpendiculaires.

b) K milieu de donc l'affixe de K est : $[T_2T_1]$

$$\frac{z_{T_1} + z_{T_2}}{2} = \frac{e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)e^{i\theta}}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{i\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}$$

Donc : $\boxed{z_K = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}}$

Alors : $\frac{z_K - z_O}{z_A - z_O} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

Donc les points K ; 0 et A sont alignés.

c) On a K est le milieu du segment $[T_2T_1]$.

La droite (OA) passe par K et perpendiculaire à (T_2T_1) (d'après 2- a et 2-b)

Alors la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_2T_1]$.

3. $r = R\left(T_1; \frac{\pi}{2}\right)$

a) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation r ; alors : $\left(z' - z_{T_1}\right) = \left(z - z_{T_1}\right)e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z' = iz + z_{T_1} - z_{T_1}e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow z' = iz + z_{T_1}(1 - i)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

www.GUESSMATHS.CO

Donc l'expression complexe de la rotation r est :

$\boxed{M'(z') = r(M(z)) \Leftrightarrow z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}}$

b) $B(b) = r(I) \Leftrightarrow b = i \times 1 + \sqrt{2}e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow b = i + \sqrt{2}e^{i\theta}$

D'où , l'affixe de B est : $\boxed{b = i + \sqrt{2}e^{i\theta}}$

c) Calculons $\dfrac{z_B - z_A}{z_I - z_J}$

► $\dfrac{z_B - z_A}{z_I - z_J} = \dfrac{i + \sqrt{2}e^{i\theta} - \sqrt{2}e^{i\theta}}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}i$

Donc : $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_I - z_J}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $\left(\overrightarrow{IJ}\,;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Par suite les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

4) Soit $t_{\vec{v}}$ la translation du vecteur $\left(-\vec{v}\right)$ et $\vec{v}(i)$

On a : $C = t_{-\vec{v}}(A) \Leftrightarrow z_C = z_A - i$

$\Leftrightarrow z_C = \sqrt{2}e^{i\theta} - i$.

Donc l'affixe du point C image du point A par la translation $t_{-\vec{v}}$ est : $\boxed{z_C = \sqrt{2}e^{i\theta} - i}$

5) L'affixe du milieu du segment [BC] est :

► $\dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{i + \sqrt{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}e^{i\theta} - i}{2}$

$= \sqrt{2}e^{i\theta}$

Donc A est le milieu du segment [BC].

Exercice 4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x\ \ln x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a) les fonctions $x \mapsto -x$; $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sont continues sur

Donc la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ comme produits de de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x\ \ln x}{1+x^2} = 0$

(Car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ \ln x = 0$)

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$; d'où f est continue à droite en 0.

Par suite f est continue sur $[0;+\infty[$.

b) le signe de f(x) est celui de $(-\ln x)$ sur $]0;+\infty[$.

WWW.GUESSMATHS.CO

Donc : ▶ $f(x) \leq 0$ sur $[1;+\infty[$

▶ $f(x) \geq 0$ sur $]0;1]$

2- a) Soit $(x \in \mathbb{R}_+^*)$, on a : $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{1}{x}\ln x}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{x^2+1}$$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

b) les fonctions $x \mapsto x\ln x$ et $x \mapsto 1+x^2$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et $1+x^2 \neq 0$ sur $]0;+\infty[$ donc la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur .

c) On a f est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ et $f(1) = f(0) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle : $\boxed{(\exists \alpha \in]0;1[) : f'(\alpha) = 0}$

d) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

Donc : $\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = (-f(x))'$ d'où $-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = -f'(x)$

Alors $\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x)$

Comme $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$; alors : $\frac{1}{\alpha^2}f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f'(\alpha)$.

Or $f'(\alpha) = 0$; donc : $\boxed{f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0}$

II- $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1-a) Soit $t \in [1;+\infty[$

• On a : $\frac{t^2}{1+t^2} - 1 = -\frac{1}{1+t^2}$ et $\frac{1}{1+t^2} > 0$

Donc : $\frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

•) On a : $\frac{1}{2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{2(1+t^2)}$ et $1-t^2 \leq 0$ (car $t \in [1;+\infty[$) ; donc : $\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2}$

D'où : $(\forall t \in [1;+\infty[)$; $\boxed{\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1}$

b) Soit $x \in [1,+\infty[$ .D'après ce qui précède ; on a :

WWW.GUESSMATHS.CO

$$; \frac{1}{2} \le \frac{t^2}{1+t^2} \le 1 \text{ et } \ln t \ge 0$$

Donc : $\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t} \le \frac{t\ln t}{1+t^2} \le \frac{\ln t}{t}$.

Alors : $-\frac{\ln t}{t} \le f(t) \le -\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}$

Et comme $1 \le x$ et les fonctions $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$; $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto -\frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}$ sont continues sur $[1,x]$

Alors $-\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \le \int_1^x f(t)dt \le -\frac{1}{2}\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$

Donc $\int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \le \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \le \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$

D'où $F(1) - \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \le \int_0^x f(t)dt \le F(1) - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$

$$F(1) - \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x \le F(x) \le F(1) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x$$

Par suite

$$F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \le F(x) \le F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$$

Alors : $\left(\forall x \in [1;+\infty[\right); \boxed{F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \le F(x) \le F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2}$

c) ► On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2 = -\infty$ et $F(x) \le F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ pour tout $x \in [1;+\infty[$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$

► On a pour tout $x \in [1;+\infty[$: $F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \le F(x) \le F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$

Donc $\frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x} \le \frac{F(x)}{x} \le \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4}\frac{(\ln x)^2}{x}4$

De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(1)}{x} = 0$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)^2$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\ln(t^2)}{t}\right)^2 \quad (t = \sqrt{x})$$

$$= \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

Par Suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

Interprétation géométrique

La courbe de F admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

WWW.GUESSMATHS.CO

2. a) On a f est continue sur $[0;+\infty[$ et $0 \in [0;+\infty[$ donc F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Et on a : $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $F'(x) = f(x)$.

Par suite : $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $\boxed{F'(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2}}$

b) D'après la question I-1-a) on a : ► $f(x) \geq 0$ sur $]0;1]$ et $f(x) \leq 0$ sur $[1;+\infty[$

D'où le tableau de variation de F.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	−	
$F(x)$	0	↗	$F(1)$	↘	$-\infty$

III- 1- a) Soit $t \in]0;+\infty[$

On considère la fonction φ définie par : $\varphi(t) = e \times t\ln t + 1$

On a : $\varphi'(t) = e \times \ln t + e$

$= e \times (\ln t + 1)$

Donc : ► $\varphi'(t) \leq 0$ pour $t \in \left]0;\dfrac{1}{e}\right]$

► $\varphi'(t) \geq 0$ pour $t \in \left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$

d'où le tableau de variation de φ.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		−	0	+	
$\varphi(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

WWW.GUESSMATHS.CO

Donc 0 est une valeur minimale pour φ sur $]0;+\infty[$; d'où :

$(\forall t \in]0;+\infty[)$; $\varphi(t) \geq 0$.

Par suite : $(\forall t \in]0;+\infty[)$; $-t\ln t \leq \frac{1}{e}$

b) D'après la question précédente on a pour tout :

$-t\ln t \leq \frac{1}{e}$ (1) et on a : $\frac{1}{1+t^2} > 0$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $(\forall t \in]0;+\infty[)$; $\frac{-t\ln t}{1+t^2} \leq \frac{1}{e}\frac{1}{1+t^2}$

Et comme $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, alors : $(\forall t \in]0;+\infty[)$; $f(t) \leq \frac{1}{e}$.

c) Soit $x \in]0;+\infty[$, et soit $0 \leq t \leq x$

On a : $f(t) \leq \frac{1}{e}$ (d'après la question précédente)

Et on a f est continue sur $[0;x]$, alors :

$\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x \frac{1}{e}dt$ d'où $\int_0^x f(t)dt \leq \frac{x}{e} < x$

Alors : $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $\boxed{F(x) < x}$

2- (u_n) : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in]0;1[$

a) **pour n=0**

On a $u_0 \in]0;1[$

Soit n∈IN

Supposons que $u_n \in]0;1[$ et montrons que $u_{n+1} \in]0;1[$

On a d'après ce qui précède que F est strictement croissante sur $]0;1[$

Alors $F(0) < F(u_n) < F(1)$

Et comme $F(0)=0$ et $F(1) < 1$ (d'après III-1-c)

Alors $u_{n+1} \in]0;1[$.

Conclusion :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in]0;1[$

b) D'après la question III-1. c) On a :

$(\forall x \in]0;+\infty[)$; $F(x) < x$

Et comme $u_n \in]0;1[$; alors $F(u_n) \leq u_n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq u_n$

Par suite (u_n) est strictement décroissantes et comme elle est minorée par 0 alors elle est convergente.

c) On a : •) f est continue sur $[0;1]$ et $F([0;1]) = [F(0),F(1)] \subset [0;1]$

WWW.GUESSMATHS.CO

•) $u_0 \in [0;1]$

•) $u_{n+1} = F(u_n)$

•) (u_n) est convergente

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est la solution de l'équation F(x) = x , dans $[0;1]$

Or d'après ce qui précède on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$: $F(x) < x$

Et comme $F(0) = 0$, alors 0 est la seule solution de l'équation F(x) = x

Donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Exercice 5 :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1) Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto e^{\frac{-1}{x}}$ sont continues sur $]0;+\infty[$, alors g est continue sur $]0;+\infty[$

(comme produit de deux fonctions continues sur $]0;+\infty[$)

D'autre part , on a :

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} t^2 e^t \quad (t = \frac{-1}{x})$$

$$= 0$$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = g(0)$, par suite g est continue à droite en 0 .

Ainsi, g est continue sur $[0,+\infty[$

2) $(\forall x \in [0;+\infty[)$: $L(x) = \int_x^1 g(t)\,dt = -\int_1^x g(t)\,dt$

a) On a g est continue sur $[0,+\infty[$ et $1 \in [0,+\infty[$, donc L est dérivable sur $[0,+\infty[$

Par suite, L est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$L(x) = \int_x^1 g(t)\,dt = \left[e^{\frac{-1}{t}} \right]_x^1 = e^{-1} - e^{\frac{-1}{x}}$$

c) On a : $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $L(x) = e^{-1} - e^{\frac{-1}{x}}$, alors :

$$\lim_{x\to0^+} L(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-1} - e^{\frac{-1}{x}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} e^{-1} - e^t \quad (t = \frac{-1}{x})$$

$$= e^{-1}$$

Et comme L est continue sur $[0,+\infty[$, alors L est continue à droite en 0 .

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} L(x) = L(0)$, par suite $L(0) = e^{-1}$

WWW.GUESSMATHS.CO

3) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$: $s_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

On g est continue sur $[0,+\infty[$, donc g est continue sur $[0,1]$

Alors $(s_n)_{n\geq 1}$ est convergente , et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \int_0^1 g(t)dt = L(0)$

Et comme $L(0) = e^{-1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = e^{-1}$

WWW.GUESSMATHS.CO