

Exercice 1:

Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \ln(3 - \sqrt{3}) + \ln(3 + \sqrt{3}) ; B = \ln e^3 - \ln \frac{2}{e} + \ln 2 ;$$

$$C = 3 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 9 - 2 \ln(2\sqrt{6}) .$$

Exercice 2:

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $\ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3)$

2) $\ln(x - 3) + \ln(x + 1) = \ln(x + 7)$

3) $4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 = 0$

Exercice 3:

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $\ln(x - 3) - \ln(x + 1) \leq 0$

2) $4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 \leq 0$

Exercice 4:

Déterminer le domaine de définition de la fonction f .

1) $f(x) = (\ln x - 2)\sqrt{4 - x} \square$

2) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

3) $f(x) = \frac{2x}{1 - \ln x}$

Exercice 5:

Calculez les limites suivantes.

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 3)}{x}$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 4x)}{x}$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 2) \ln x}{x^2 - 1}$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

Exercice 6:

Démontrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$; et explicitez $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$

2) $f(x) = \ln \sqrt{1 + 4x + x^2}$

3) $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{1 + x}$

4) $f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x}$

Exercice 7:

la fonction f définie sur $[1; +\infty[$, par :

$$f(x) = x\sqrt{\ln x}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue sur $[1; +\infty[$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 ; et Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Déterminer l'intersection de $(\Delta): y = x$ et (C_f)

b) Tracer (C_f) et (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0; +\infty[\square$.

b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

5) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) .$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq e$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 8:

Partie 1 :

Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x).$$

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $] -1; +\infty[$ deux solutions 0 et α ; puis vérifier que : $3.8 < \alpha < 4$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$

4) Montrer que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, on a :

$$g(x) \leq 1$$

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

3) Montrer que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

4) Dresser le tableau de variation de f

5) vérifier que : $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.

6) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 9:

Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .

1) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$; $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

2) $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; $I =]1; +\infty[$.

4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \tan x$; $I =]0; \frac{\pi}{2}[$

Exercice 10:

Partie A:

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2 \ln(x) + 1$$

1) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$ on a :

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B:

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \text{ et } (C_f) \text{ désigne}$$

la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm) .

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter graphiquement.

3) Montrer que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau de variation de f .

4) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

5) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = x + \ln x$$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; 1[$.

Et vérifier que : $e^{-\alpha} = \alpha$.

b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) .

6) Construire (C_f) et (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice 10:

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$$

1) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B : Etude d'une fonction.

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3) a) Vérifier que: $(\forall x > 0) ;$

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; et interpréter le résultat trouvé géométriquement.

4) a) Démontrer que $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire les variations de f .

5) Construire (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 11:

Partie A:

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + (x - 2)\ln(x)$$

a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; g'(x) = 2\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

b) Etudier les variations de g . Puis en déduire que la fonction g est strictement positive.

Partie B:

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$g(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$ et (C_f) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité 2 cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2) Montrer que (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées.

3) a) Vérifier que $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, et étudier les variations de f .

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

4) a- Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b- Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - 1 - \ln x$.
En déduire le signe de $h(x)$.

c- Montrer que: $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$; et en déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à (T) .

5) Tracer les courbes (C_f) ; $(C_{f^{-1}})$ et la tangente (T) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$