



## Exercice 2 « Fonction Logarithme »

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = e^{2x} + 2e^x - 4x - 3$

et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , et donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-4x - 3)$  et en déduire que  $(C)$  admet comme asymptote oblique la droite  $(\Delta)$  dont on déterminera une équation.

2) a. Montrer que :  $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 2)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

b. Étudier le signe de  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$ .

3) Tracer la courbe  $(C)$ .

### Solution

1) a. Calculons:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

■ Calculons:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 2e^x - 4x - 3)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{2e^{2x}}{2x} + 2 \frac{e^x}{x} - 4 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= +\infty$$

$$(\text{car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty)$$

$$\text{Alors : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

■ Calculons:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Soit  $x > 0$  on a:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{2x} + 2e^x - 4x - 3}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2e^{2x}}{2x} + 2 \frac{e^x}{x} - 4 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= +\infty$$

$$(\text{car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty)$$

$$\text{Donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$$

Interprétation géométrique:

on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

donc la courbe  $(C)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$ .

b. Calculons:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

■ On a:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + 2e^x - 4x - 3)$

$= +\infty$   
(car :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ )

Donc:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$

■ Calculons:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-4x - 3)$

On a :  $f(x) - (-4x - 3) = e^{2x} + 2e^x$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

Alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-4x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} + 2e^x$

donc:  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-4x - 3) = 0}$

(car :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ )

Conclusion:

On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-4x - 3) = 0$

Donc la droite d'équation  $y = 4x - 3$  est une asymptote oblique à  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

2) a. Montrons que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 2)$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,

Soit  $x \in \mathbb{R}$  on a :  $f'(x) = (e^{2x} + 2e^x - 4x - 3)'$   
 $= 2e^{2x} + 2e^x$   
 $= e^{2x} - 4 + e^{2x} + 2e^x$   
 $= (e^x - 2)(e^x + 2) + e^x(e^x + 2)$   
 $= ((e^x - 2) + e^x)(e^x + 2)$   
 $= 2(e^x - 1)(e^x + 2)$

Donc:  $(\forall x \in \mathbb{R}) \boxed{f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 2)}$

b. Étudions le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  on a :  $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 2)$  et  $(e^x + 2) > 0$

Donc le signe de  $f(x)$  est celui de  $(e^x - 1)$  c'est-à-dire le signe de  $x$  sur  $\mathbb{R}$

d'où le tableau de signe de  $f'(x)$  est le suivant:

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0   | +         |

Tableau de variations de  $f$

|         |           |     |           |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0   | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

3) La courbe (C)

