Exercice 01 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3a^2x+2$ Où $a\in\mathbb{R}^{*+}$.

✓ Déterminer suivant les valeurs du paramètre a le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $]0;2a[$.

Exercice 02 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x-a_k|$.

Où $a_1;a_2;........;a_n$ sont des nombres réels de l'intervalle $[0;1]$

1) a) Justifier que: $f(0)+f(1)=1$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Prouver que l'équation $(E): f(x)=\frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

Exercice 03 :

Soit la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$.

1) a) Déterminer D_f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0=0$? Justifier la réponse.

Exercice 04 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x.\text{Arctan}\,x}$ si $x<0$ et $f(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1-\cos(\pi x)}{x\left(1-E\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$ si $x>0$.

1) a) Déterminer D_f.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Etudier la continuité de f en $a=\frac{1}{3}$ .Puis en $a_n=\frac{1}{n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

b) f admet-elle un prolongement par continuité en $b=0$? Justifier la réponse.

Exercice 05 :

✓ Calculer chacune des limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2-x+1}}-\sqrt[3]{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{3x-2}-\sqrt[3]{4x-3}}{x-\sqrt[3]{4x}+3}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi+\text{Arctan}\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-1}}-1\right)}{x-2}$

Exercice 06 :

I- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g(x)=x^2+x\sqrt{1+x^2}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) a) Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ x+\sqrt{1+x^2}>0$.

b) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) a) En déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)=\mathrm{Arctan}(g(x))$

1). Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproques f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

3) a) Montrer que $f(1)=\frac{3\pi}{8}$

b) Montrer que l'équation $(E):\ f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha\in\left]0;1\right[$.